

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编 陶平生 冯跃峰 边红平

DAISHU BIANXING

代数变形

蔡小雄 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 代数变形/蔡小雄编著. —杭州：浙江大学出版社，2008.8
ISBN 978-7-308-06038-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 蔡… Ⅲ. 代数课—高中 教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 087663 号

代数变形

编　　著　蔡小雄

责任编辑　杨晓鸣
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
　　　　　(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028)
　　　　　(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
　　　　　(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州浙大同力教育彩印有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　7.75
印　　数　0001—8000
字　　数　160 千
版 印 次　2008 年 6 月第 1 版　2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06038-7
定　　价　12.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

丛书编委会

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来，反响强烈，深受广大读者喜爱，并收到了大量反馈信息。很多读者，包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见，希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求，我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种：《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》；考虑到配套，把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的拔高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。

写在前面

著名数学教育家乔治·波利亚有一句脍炙人口的名言:"掌握数学就是意味着善于解题". 的确,解题是数学工作者数学活动的基本形式,解题也是学生进一步掌握知识,应用知识的重要环节.

数学竞赛是一种较高层次的解题活动,而解题需要一些数学"技巧". 但这些"技巧"不是个别孤立的一招一式或妙手偶得的雕虫小技,而是一种高层次思维、高智力水平的策略思想. 在学习的起始阶段,我们需要掌握这些方法与技巧,且多多益善. 但到了一定水平以后,也许要追求的就是"无招胜有招"了.

代数是数学竞赛中占比重最多的一部分,很多从事竞赛研究的专家认为:你如果数学竞赛不能取得好成绩,那肯定是代数这块出了问题,这不无道理. 事实上,解决代数问题的关键是掌握代数变形的技巧,代数变形是数学解题的基石,变形能力的强弱直接制约着解题能力的高低.

变形实质上是为了达到某种目的而采用的"手段",是化归、转化和联想的准备阶段,它属于技能性的层面,需要在实践中反复操练才能把握,乃至灵活与综合应用. 我们在平时学习中如果不善于积累一些变形的技巧,那么在稍复杂的问题面前常会因变形方向不清,而导致常规的化归、转化工作难以实施,甚至无功而返.

解题的成功取决于多种因素,其中最基本的有:解题的知识因素,解题的能力因素,解题的经验因素和解题的非智力因素,等等. 因此,要提高代数变形的能力,应从以下三个层面进行强化与提高:

第一层面:知识结构层面

人的思维依赖于必要的知识和经验,数学知识正是数学解题思维活动的出发点与基石. 掌握丰富的知识并加以优化,才能为题意的本质理解与思路的迅速寻找创造成功的条件. 解题研究的一代宗师乔治·波利亚说过:"货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本."因此,要想提高代数变



形的能力，首先要熟练掌握代数的相关基础知识.对于中学数学解题来说，应如数家珍地说出教材的概念系统、定理系统、符号系统以及中学数学竞赛涉及的基础理论，并在解题实践中进一步深刻理解.

第二层面：方法技巧层面

R·柯朗在《数学是什么》这本名著的序言中有这样一段话："学生和教师若不试图从数学的形式和单纯的演算中跳出来，以掌握数学的本质，那么挫折和迷惑将变得更为严重."可见，学习数学不能盲目地在题海中遨游，更不能就事论事，尤其是高中阶段的数学学习，应当注重掌握数学的方法技巧.

第三层面：思维能力层面

解题能力，表现为发现问题、分析问题、解决问题的敏锐力、洞察力与整体把握.其主要成分是三种基本的数学能力，即运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，核心是能否掌握正确的思维方法，包括逻辑思维与非逻辑思维.只有具备了一定的能力，我们才能在解题中"因题制宜"地选择对口的解题思路，使用有效的解题方法，调动精明的解题技巧.

在本书中，我们将重点探讨第二层面的内容.笔者将代数变形的常用技巧概括为以下八方面：活用常数，配以对偶，合理代换，加强命题，逐步调整，分拆合项，和式变换与巧妙构造，力求通过一些典型的问题提炼一般的规律，从而掌握方法，形成能力.

本书的写作提纲是在充分征求广大竞赛研究专家和竞赛教练的意见基础上形成的，书中很多内容是根据笔者近几年为杭州二中学生辅导竞赛时的讲课稿整理而成，有些专题的成果已在全国竞赛类核心刊物《中等数学》上发表，也有些内容直接参考自国内外竞赛专家的论文或专著，在此一并表示感谢.另外，由于水平有限，书中不妥之处也请专家、同行与读者不吝指正.

蔡小雄
2008 年 1 月 18 日





目录





第1讲　活用常数

方法点津

常数是代数式中最活跃的一分子，善待常数，活用常数，充分发挥好常数的"过渡"功能，将使许多复杂的代数问题的解决"如虎添翼"．

在初等数学中，最常见与常用的常数为"0"与"1"．在解决有些代数问题时，运用"0"这一重要常数可起到"无中生有""天堑变通途"的作用．另外，巧妙地发挥常数"1"的替换功能也将使许多原本难以入手的问题豁然开朗．

如常数"1"可用以下重要恒等式替换：

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$1=\tan\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\cos 2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$

$1=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{a}\,(a\neq 0,b\neq 0)$

$1=\log_a b\cdot\log_b a=\log_a a\,(a>0,b>0,a\neq 1,b\neq 1)$

$1=a^0\,(a\neq 0)$

$1=\mathrm{i}^{4k}$（$k\in\mathbf{Z}$，i 为虚数单位）

$1=1^k\,(k\in\mathbf{R})$

当然，除了用以上恒等式替换常数外，活用常数还包括分拆常数、配凑常数、提取常数与添加常数等技巧．下面通过一些具体例子加以简要说明，希望读者能触类旁通，举一反三．

典型例题

例 1 已知 $abc=1$，求 $\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}$ 的值.

解 将题中的 1 用 abc 替换，得

原式 $=\frac{a}{ab+a+abc}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{bc}{bc+b+1}=\frac{bc+b+1}{bc+b+1}=1.$

评注 本题的解法很巧，若将所求式通分化简，再代入已知式或将已知式变形再代入所求都不易求出结果. 习惯上是将字母代换成数，而此题是将数代换成字母，反而收效明显. 因此，常值代换也是恒等变形的重要技巧.

例 2 已知 m，n 是正整数，且 $1<m<n$，求证：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

证明 $(1+n)^m=\underbrace{(1+n)(1+n)\cdots(1+n)}_{m个括号}\cdot\underbrace{1\cdots\cdots1}_{n-m个1}<\left[\frac{m(1+n)+n-m}{n}\right]^n$

$=(1+m)^n$.

评注 本题可通过构造函数，借助导数来证明，也可先证明 $n^tA_m^t<m^tA_n^t$，再利用二项式定理证明. 但都不如将 1 分拆成 $n-m$ 个 1 相乘，再利用平均不等式证明来得简捷.

例 3 （第 36 届美国普特南试题）设 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，求证：

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}\ (n>2).$$

证明 由均值不等式得，当 $n>2$ 时，有

$\frac{1}{n}(S_n+n)=\frac{1}{n}\left[(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

$$\geqslant\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=(n+1)^{\frac{1}{n}},$$

即 $n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n$.

另一方面，$\frac{1}{n-1}(n-S_n)=\frac{1}{n-1}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$

$>\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}=n^{-\frac{1}{n-1}}$.

因此，$n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}\ (n>2)$.

评注 以上解法的巧妙之处在于将 n 分拆成 n 个 1 相加，从而为均值不等式的顺

利运用创造了条件。

例 4 （2007年中国东南地区奥林匹克试题）设正实数 a、b、c 满足 $abc=1$，求证：对于整数 $k\geqslant 2$，有 $\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$。

证明 因为

$$\frac{a^k}{a+b}+\frac{1}{4}(a+b)+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{k-2}\geqslant k\cdot\sqrt[k]{\frac{a^k}{2^k}}=\frac{k}{2}a,$$

$$\frac{a^k}{a+b}\geqslant\frac{k}{2}a-\frac{1}{4}(a+b)-\frac{k-2}{2}.$$

同理可得

$$\frac{b^k}{b+c}\geqslant\frac{k}{2}b-\frac{1}{4}(b+c)-\frac{k-2}{2},$$

$$\frac{c^k}{c+a}\geqslant\frac{k}{2}c-\frac{1}{4}(c+a)-\frac{k-2}{2}.$$

三式相加可得

$$\begin{aligned}\frac{a^k}{a+b}+\frac{b^k}{b+c}+\frac{c^k}{c+a}&\geqslant\frac{k}{2}(a+b+c)-\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\\&=\frac{(k-1)}{2}(a+b+c)-\frac{3}{2}(k-2)\\&\geqslant\frac{3}{2}(k-1)-\frac{3}{2}(k-2)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

评注 以上解法妙在巧拆常数，合理拼项，顺利运用均值不等式。当然，本题也可利用Cauchy不等式或幂平均不等式及切比雪夫不等式证明。同以上方法也可巧妙地解答以下第31届IMO预选题：设 a、b、c、d 是满足 $ab+bc+cd+da=1$ 的非负实数，求证 $\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}$。

例 5 已知 $a_i>0$ $(i=1,2,3,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，求证 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}$。

证明 在不等式左边配凑 n 个常数1，运用Cauchy不等式证明

$$(1^2+1^2+\cdots+1^2)\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2.$$

又 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1$，$a_i>0$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$，即 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geqslant n^2$。

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(1+n^2)^2}{n}$。

评注 上例通过配凑若干个常数1后再运用了Cauchy不等式证明，充分体现常数的魅力。

例6 （2012年湖南省数学竞赛试题）设长方体的长、宽、高分别为a、b、c，其对角线长为l，试证：$(l^4-a^4)(l^4-b^4)(l^4-c^4)\geqslant 512a^4b^4c^4$。

证明 原不等式等价于$\left(\frac{l^4}{a^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{b^4}-1\right)\left(\frac{l^4}{c^4}-1\right)\geqslant 512$。

设$x=\frac{a^2}{l^2}$，$y=\frac{b^2}{l^2}$，$z=\frac{c^2}{l^2}$，则$x+y+z=1$，则原不等式可写成

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\geqslant 512$$

由$\frac{1}{x^2}-1=\frac{(1-x)(1+x)}{x^2}=\frac{(y+z)(x+x+y+z)}{x^2}$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot 4\sqrt[4]{x^2yz}}{x^2}=\frac{8\sqrt[4]{x^2y^3z^3}}{x^2},$$

其中等号当且仅当$x=y=z$时取到。

同理，有$\frac{1}{y^2}-1\geqslant\frac{8\sqrt[4]{x^3y^2z^3}}{y^2}$，$\frac{1}{z^2}-1\geqslant\frac{8\sqrt[4]{x^3y^3z^2}}{z^2}$。

以上三式相乘，即证得原不等式成立。

例7 求证：$k^2C_n^k=2C_n^2C_{n-2}^{k-2}+C_n^1C_{n-1}^{k-1}$。

证明 在等式左边加进$(-k+k)C_n^k$，得

左边$=(k^2-k+k)C_n^k=k(k-1)C_n^k+kC_n^k$

$$=k(k-1)\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+k\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$=n(n-1)\cdot\frac{(n-2)(n-3)\cdots[(n-2)-(k-2)+1]}{(k-2)!}+$$

$$n\cdot\frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!}$$

$$=n(n-1)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}=2C_n^2C_{n-2}^{k-2}+C_n^1C_{n-1}^{k-1}.$$

例8 若$a,b,c\in[0,1]$，求证：

$$\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1$$

证明 不失一般性，可设$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，在原不等式左边添加常数0，并将0用$\frac{1}{1+a+b}-\frac{1}{1+a+b}$替代，得

左边$=\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+\frac{1}{1+a+b}-\frac{1}{1+a+b}$



$$+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\leqslant \frac{1}{1+a+b}+\frac{a}{1+b+a}+\frac{b}{1+a+b}+\frac{c}{1+a+b}-\frac{1}{1+a+b}$$

$$+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=\frac{1+a+b}{1+a+b}+\frac{c-1}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)$$

$$=1+(1-c)\left[(1-a)(1-b)-\frac{1}{1+a+b}\right]$$

$$=1+\frac{1-c}{1+a+b}\left[a^2(b-1)+b^2(a-1)-ab\right]\leqslant 1$$

例 9 设 a，b，c 为三角形三边的长，求证 $abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

证明 由三角形两边和大于第三边知 $a+b-c$，$b+c-a$，$c+a-b$ 都大于 0.

$$a=a+0=a+\frac{b-c+c-b}{2}=\frac{(a+b-c)+(c+a-b)}{2}$$

$$\geqslant\sqrt{(a+b-c)(c+a-b)}.$$

同理 $b\geqslant\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)}$，$c\geqslant\sqrt{(c+a-b)(b+c-a)}$.

三式相乘即得证.

评注 "0"是个特殊的常数，利用运算"无中生有"这一招，在原有的式子中添加常数 0，并将其巧妙转化，可使复杂的问题简单化.

例 10 $a_i,b_i,c_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，求证：

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}+\sqrt[n]{c_1c_2\cdots c_n}.$$

证明 此题直接证明不好入手，若将不等式一边变成 1，再观察新的不等式结构的特点，易得证明思路.

原不等式等价于

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$+\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$

$$+\sqrt[n]{\frac{c_1c_2\cdots c_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}\leqslant 1 \qquad ①$$

注意到

$$\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$$



$\le \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{a_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{a_n}{a_n+b_n+c_n}\right)$，

$\sqrt[n]{\frac{b_1b_2\cdots b_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$

$\le \frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{b_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n+b_n+c_n}\right)$，

$\sqrt[n]{\frac{c_1c_2\cdots c_n}{(a_1+b_1+c_1)(a_2+b_2+c_2)\cdots(a_n+b_n+c_n)}}$

$\le \frac{1}{n}\left(\frac{c_1}{a_1+b_1+c_1}+\frac{c_2}{a_2+b_2+c_2}+\cdots+\frac{c_n}{a_n+b_n+c_n}\right)$

将上面三个不等式相加即得式①.

因此，原不等式成立.

例11 （第46届IMO试题）设正实数 x,y,z，若 $xyz\ge 1$，证明 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge 0$.

证明 因 [illegible] $=(y-z)(y^3-z^3)\ge 0$，

则 [illegible] $\ge yz(y^2+z^2)$ [illegible]

[illegible]

则 [illegible] $\ge \frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}$

故 $\sum$ [illegible] $\ge \sum\frac{x^4}{x^4+y^4+z^4}=1$.

因为 $xyz\ge 1$，于是，

$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)$

$\ge (x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)$

$\ge (x^2+y^2+z^2)^2$.

从而 $\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{yz+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

则 $\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{x^2(yz+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\le\frac{\frac{3}{2}x^2(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

故 $\sum\frac{x^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}\sum\frac{3}{2}(x^2y^2+z^2x^2)$



$$=\frac{3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\leq 1 \qquad ②$$

①、②即知所证不等式成立.

评注 有些不等式表面看似乎与1无关，但若抓住问题本质，以“1”为参照物，将不等式转化为与“1”相关的不等式来证明，再借助重要不等式往往能使原问题简捷获证．当然，本题还有更简捷的两种解法．以下解法为摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 给出，他也因此解法获得46届IMO特别奖：

因为 $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)}\geq 0$，

所以 $\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geq\sum\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum\left(x^2-\frac{1}{x}\right)$

$$\geq\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum(x^2-yz)\text{（因为 }xyz\geq 1\text{）}\geq 0.$$

例12 （1992・CMO试题）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数，记 $x_{n+1}=x_1$，$a=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，试证 $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leq n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a)^2$，等式成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证法一 所求不等式可改写为

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leq\sum_{j=1}^{n}1+\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{n}(x_{j+1}-a)^2,$$

所以，只要证明对 $j=1,2,\cdots,n$，总有

$\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}\leq 1+\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}(x_{j+1}-a)^2$ 即可.

令 $a_j=\frac{1+x_j}{1+x_{j+1}}-1-\frac{x_j-x_{j+1}}{1+a}=\frac{(x_j-x_{j+1})(a-x_{j+1})}{(1+a)(1+x_{j+1})}$.

当 $x_j>x_{j+1}$ 时，有 $a_j\leq 0\leq\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2}$；

当 $x_j\leq x_{j+1}$ 时，有 $a_j=\frac{(x_{j+1}-a)(x_{j+1}-x_j)}{(1+a)(1+x_{j+1})}\leq\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2}$.

这就证明了不等式成立.

显然，等号成立当且仅当

$$a_j=\frac{(x_{j+1}-a)^2}{(1+a)^2},\ 1\leq j\leq n,$$

即 $(x_{j+1}-a)[(1+a)(x_{j+1}-x_j)-(x_{j+1}-a)(1+x_{j+1})]$

$(x_{j+1}-a)[(1+a)(x_j-a)+(x_{j+1}-a)^2]=0,$



由于 $(1+a)(x_j \quad a) \quad (x_{j+1} \quad a) \leqslant$ [illegible].

所以 $x_j = a$ 或 $x_{j+1} > a$,$(1+a)(x_j \quad a) \quad (x_{j+1} \quad a)^2 \leqslant 0$,导出矛盾

因此,$x = x_2 = \cdots = x_n = a$.

证法二 设 [illegible] 为 $x_1, x, \cdots, x_n$ 的 个排列,且 $0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ 于是,$1 \leqslant 1 + y_1 \leqslant 1 + y_2 \leqslant \cdots \leqslant 1 + y_n$ 由排序不等式,有

$$\sum \frac{1+ \quad}{1 \quad} \quad \sum \frac{1+y}{\quad y_n}.$$

只要能证得 $\sum \frac{1+y}{1 \quad y} \quad n + \frac{1}{(1+a)} \sum (y \quad a)$ 即可

由于 [illegible]

所以 $\sum \frac{1 \quad y}{\quad y} \quad n + \frac{1}{(1-a)} \sum (y \quad a)$,

因此 $\sum \frac{1+x_j}{1+x} \leqslant n \quad \frac{1}{(1 \quad a)} \sum (x \quad - a)$

又等号成立当且仅当 y_j [illegible],且 $(1+a) = (1+y_j) \cdot (1+y_{n-j+1})$.

由 a [illegible] 有 y [illegible] a,$j = 1, 2, \cdots, n$

这证明了 $y = y_2 = \cdots = y = a$,即 $x = x = \cdots = x_n = a$

习题精选 1

1. 求和 [illegible]

2. 已知 $\sin 2(\alpha + \gamma) = n\sin 2\beta$,求证 $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{n+1}{n-1}\tan(\alpha \quad \beta + \gamma)$

3. 求和:$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 - \cdots - n^2$.

4. 设 $a \geqslant 0$,$b \geqslant 0$,$n \in \mathbf{N}$,求证:$\frac{a^n + b^n}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

5. 证明:$5^{n+1} + 3^n \cdot 2^{n+1}$ 能被 19 整除,其中 $n \in \mathbf{N}^*$

6. 已知 $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = 0 \\ A\sin 2x + B\cos 2x = C \end{cases}$,其中 $a \neq 0$,求证:$2abA + (b^2 - a^2)B + (a^2 + b^2)C = 0$



7. 已知 $0<t<1$，a、b 是常数，且 $ab>0$，求证 $\frac{a^2}{t^3}+\frac{b^2}{1-t^3}\geqslant(a+b)^2$。

8 设 a、b、c 为正实数，且满足 $abc=1$，求证：$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$。

9 设 a、b、c 为正实数，求证：$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geqslant4\sqrt{3abc(a+b+c)}$。

10. 非负实数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，满足：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=1$，求 $\frac{a_1}{1+a_2+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$ 的最小值



第[illegible]讲 配以对偶

方法点津

大家知道，数学中有许多问题有着和谐的对称美，如等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项顺序和与逆序和相加，由此巧妙地得到前 n 项求和公式. 解题中如果能善于挖掘与利用这种关系，往往会有意想不到的收获. 配以对偶这种解题技巧就是其中典型的一例.

在解某些数学问题时，针对其中的某个式子 A 的特点，为其配凑一个合适的式子 B，不妨称其对偶式，使得由 A 和 B 之间的某些运算，能产生一些有用的关系式，如常数、对称式、标准式等，从而促使问题向有利的方向转化，进而解决问题. 我们将这种解决问题的技巧称为配以对偶的技巧. 运用该技巧的一般步骤是：

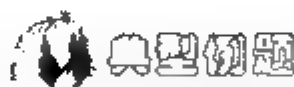
步骤 1：将已知式令为 A 并配其对偶式 B；

步骤 2：对 A 与 B 进行适当地运算；

步骤 3：转化或消化 B，从而解决原问题.

一般而言，配以对偶也是一种构造性的解题技巧，它对解题者的思维要求较高. 另外，对偶式的形式往往不拘一格，主要有互余型对偶式、差型对偶式和对称型对偶式等.





典型例题

例1 （第5届IMO试题）试证 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

证明 设 $A=\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}$，构造其互余配偶式 $B=\sin\frac{\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}$.

则 $A^2+B^2=3-4\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{2\pi}{7}$， ①

$A^2-B^2=-\cos\frac{\pi}{7}+3\cos\frac{2\pi}{7}-5\cos\frac{3\pi}{7}$. ②

①+②得 $2A^2=3-5A$

解得 $A=\frac{1}{2}$ 或 $A=-3$（舍去）.

评注 例1所用的方法可称为"互余配对"，即将 $A=f(x,y,z,\cdots)$ 配以 $B=f\left(\frac{\pi}{2}-x,\frac{\pi}{2}-y,\frac{\pi}{2}-z,\cdots\right)$ 一般在三角求值、化简问题中运用较有效.

例2 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，$a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$，求证：$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6$.

证明 记不等式左边为 A，构造 A 的配偶式 $B=(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4$.

于是，有

$$\begin{aligned}A+B&=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2)\\&=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\leqslant 6.\end{aligned}$$

又 $B>0$，所以 $A\leqslant 6$.

评注 例2运用的是"和差配对"的技巧，即将 $A=f(x+y)$ 与 $B=f(x-y)$ 配对，如 $a+b$ 与 $a-b$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$a+bi$ 与 $a-bi$ 等均属常用的和差配对例子.

例3 如果 a,b,c 是正数，求证：$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$.

证明 记不等式左边为 M，构造配偶式 $N=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+$



$\dfrac{a^3}{c^2+ca+a^2}$

则 $M-N=0$，即 $M=N$。

又 $M+N=(a+b)\cdot\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}+(b+c)\cdot\dfrac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2}+(c+a)\cdot\dfrac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}$，

由基本不等式，易得

$\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\geqslant\dfrac{1}{3}$，

$\dfrac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2}\geqslant\dfrac{1}{3}$，

$\dfrac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{1}{3}$

故 $M+N\geqslant\dfrac{2(a+b+c)}{3}$

所以，$M\geqslant\dfrac{a+b+c}{3}$。

评注 例3运用的配对方法不妨称为“对称配对”，如可将 $A=f(x,y)$ 配以 $B=f(y,x)$。

例4 设 x,y,z 是正数，求证：$\dfrac{z^2-x^2}{x+y}+\dfrac{x^2-y^2}{y+z}+\dfrac{y^2-z^2}{z+x}\geqslant0$。

证明 记不等式左边为 M，构造配偶式

$$N=\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}+\frac{y^2-x^2}{z+x}$$

则 $M-N=\dfrac{y^2-x^2}{x+y}+\dfrac{z^2-y^2}{y+z}+\dfrac{x^2-z^2}{z+x}$

$=(y-x)+(z-y)+(x-z)=0$

故 $M=N$

又 $M+N$

$=\left(\dfrac{z^2-x^2}{x+y}+\dfrac{x^2-z^2}{y+z}\right)+\left(\dfrac{x^2-y^2}{y+z}+\dfrac{y^2-x^2}{z+x}\right)+\left(\dfrac{y^2-z^2}{z+x}+\dfrac{z^2-y^2}{x+y}\right)$

$=\dfrac{(z+x)(z-x)^2}{(x+y)(y+z)}+\dfrac{(x+y)(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}+\dfrac{(y+z)(y-z)^2}{(z+x)(x+y)}\geqslant0$。

故 $M\geqslant0$

评注 此题为著名的 W Janous 不等式，可用排序不等式证明，也可用以下换元法证明：令 $x+y=c$，$y+z=a$，$z+x=b$，原不等式等价于 $\dfrac{c(a-b)}{b}+\dfrac{a(b-c)}{c}+\dfrac{b(c-a)}{a}\geqslant0$



$\Leftrightarrow \frac{ac^3(a-b)+a^2b(b-c)+b^3c(c-a)}{abc} \geq 0$，只要证 $a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2-abc^2-a^2bc-ab^2c \geq 0$ 而此为显然。

例 5 （第 24 届全苏中学生数学竞赛试题）证明：对于和为 1 的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，不等式 $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{1}{2}$ 成立

证明 记不等式左边为 A，构造 A 的配偶式

$B=\frac{a_2^2}{a_2+a_1}+\frac{a_3^2}{a_3+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_{n-1}}+\frac{a_1^2}{a_1+a_n}$，

则 $A-B=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_1)=0$，即 $A=B$

因此，$A=\frac{1}{2}(A+B)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2+a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2+a_n^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)$

$\geq \frac{1}{4}\left[\frac{(a_1+a_2)^2}{a_1+a_2}+\frac{(a_2+a_3)^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{(a_n+a_1)^2}{a_n+a_1}\right]$

$=\frac{1}{4}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_1)]$

$=\frac{1}{2}$

评注 解决本题最简单的方法应该是直接运用 Cauchy 不等式，请读者不妨一试。

例 6 （1990 年全国高中数学联赛试题）设 $n=1990$，求 $\frac{1}{2^n}(1-3C_n^2+3^2C_n^4-3^3C_n^6+\cdots+3^{994}C_n^{1988}-3^{995}C_n^{1990})$。

解 设所求式为 A，变形后得

$A=\frac{1}{2^n}(\sqrt{3^0}-\sqrt{3^2}C_n^2+\sqrt{3^4}C_n^4-\sqrt{3^6}C_n^6+\cdots+\sqrt{3^{1988}}C_n^{1988}-\sqrt{3^{1990}}C_n^{1990})$

由二项式展开式的特点知，上式括号内是一个二项式展开式的一部分，因此可构造 A 的如下配偶式：

$B=\frac{1}{2^n}(-\sqrt{3}C_n^1+\sqrt{3^3}C_n^3-\sqrt{3^5}C_n^5+\cdots+\sqrt{3^{1987}}C_n^{1987}-\sqrt{3^{1989}}C_n^{1989})$，

则 $A+Bi=\frac{1}{2^n}(-1+\sqrt{3}i)^n$

$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n=\omega^{1990}=\omega^{3\times 663}\cdot\omega=\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，

故 $A=-\frac{1}{2}$



例7 (第26届独联体数学奥林匹克试题)证明：对任意实数 $a>1$，$b>1$，有不等式

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8.$$

证明 记不等式左边为 M，构造配偶式

$$N=\frac{b^2}{b-1}+\frac{a^2}{a-1}.$$

则 $M-N=\frac{a^2-b^2}{b-1}+\frac{b^2-a^2}{a-1}$

$$=\frac{(a+b)(a-b)^2}{(a-1)(b-1)}\geqslant 0.$$

故 $M\geqslant N$.

而 $N=b+1+\frac{1}{b-1}+a+1+\frac{1}{a-1}$

$$=4+(b-1)+\frac{1}{b-1}+(a-1)+\frac{1}{a-1}$$

$$\geqslant 4+2+2=8.$$

所以，$M\geqslant N\geqslant 8$，即 $M\geqslant 8$.

例8 (1991年亚太地区数学竞赛试题)设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正实数，且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$，证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

证明 记不等式左边为 M，构造配对式 $N=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{a_k+b_k}$，则

$$M-N=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=0,$$

故 $M=N$.

又 $M+N=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}$.

由基本不等式，易得 $\frac{a_k^2+b_k^2}{a_k+b_k}\geqslant\frac{1}{2}(a_k+b_k)$.

故 $M+N\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

所以，$M\geqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$

评注 本题也可由 Cauchy 不等式直接证得



例 9 （第 31 届 IMO 预选试题）已知 $x\geqslant y\geqslant z>0$，求证：$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\geqslant x^2+y^2+z^2$

证明 记不等式左边为 M，构造配偶式

$$N=\frac{x^2z}{y}+\frac{y^2x}{z}+\frac{z^2y}{x}.$$

由 Cauchy 不等式，有

$$M\cdot N\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2.$$

又 $M-N$

$$=\frac{1}{xyz}[x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2-(x^3z^2+y^3x^2+z^3y^2)]$$

$$=\frac{1}{xyz}[(x^3y^2-y^3x^2)+(z^3x^2-z^3y^2)-(x^3z^2-y^3z^2)]$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)(x^2y^2+z^3x+z^3y-z^2x^2-z^2xy-z^2y^2)$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)[(x^2y^2-z^2x^2)-(z^2xy-z^3x)-(z^2y^2-z^3y)]$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x^2y+x^2z-z^2x-z^2y)$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)[(x^2y-z^2y)+(x^2z-z^2x)]$$

$$=\frac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx).$$

由 $x\geqslant y\geqslant z>0$ 知 $M-N\geqslant 0$，即 $M\geqslant N$.

故 $M^2\geqslant M\cdot N\geqslant(x^2+y^2+z^2)^2$.

评注 同理可解以下 1999 年北京市中学生数学竞赛题：已知 $x\geqslant y\geqslant z>0$，求证：$\frac{x^2y}{y+z}+\frac{y^2z}{z+x}+\frac{z^2x}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$.

例 10 （第 6 届河南省高中数学竞赛试题）若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$a_i\in\mathbf{R}_+$（$i=1,2,\cdots,n$），证明 $\frac{a_1^4}{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\frac{a_2^4}{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}+\cdots+\frac{a_n^4}{a_n^3+a_n^2a_1+a_na_1^2+a_1^3}\geqslant\frac{1}{4}$.

证明 记不等式左边为 M，构造配偶式

$$N=\frac{a_2^4}{a_1^3+a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_2^3}+\frac{a_3^4}{a_2^3+a_2^2a_3+a_2a_3^2+a_3^3}+\cdots+\frac{a_1^4}{a_n^3+a_n^2a_1+a_na_1^2+a_1^3}.$$

则 $M-N$



$$= \frac{a_1^4 - a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 - a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 - a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}$$

$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_1) = 0.$

故 $M = N$.

又 $M + N = \frac{a_1^4 + a_2^4}{(a_1^2 + a_2^2)(a_1 + a_2)} + \frac{a_2^4 + a_3^4}{(a_2^2 + a_3^2)(a_2 + a_3)} + \cdots + \frac{a_n^4 + a_1^4}{(a_n^2 + a_1^2)(a_n + a_1)}$,

由基本不等式,易得

$\frac{a_1^4 + a_2^4}{a_1^2 + a_2^2} \geqslant \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2)$, $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} \geqslant \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$

故 $M + N$

$\geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2 + a_3^2}{a_2 + a_3} + \cdots + \frac{a_n^2 + a_1^2}{a_n + a_1}\right]$

$\geqslant \frac{1}{4}[(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_n + a_1)]$

$= \frac{1}{2}$.

所以,$M \geqslant \frac{1}{4}$.

习题精选 2

1. 求$(\sqrt{3}+1)^6$的整数部分.

2. 求证:$\frac{1}{15} < \frac{1\times 3\times 5\times \cdots \times 99}{2\times 4\times \cdots \times 100} < \frac{1}{10}$

3. 已知$n\in \mathbf{N}^*$,求证:$\frac{2}{1}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{3n-1}{3n-2} > \sqrt[3]{3n+1}$.

4. 已知$k\in \mathbf{N}^*$,$k\geqslant 2$,证明$\left(\frac{k+1}{2}\right)^k > k!$

5. (1990年全国高中联赛试题)已知a,b为整数且$a>b>0$,$\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$(其中$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$),$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$,求证:对一切自然数$n$,$A_n$均为整数.

6. 设k是给定的正整数,且$A=k+\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$,证明:对一切自然数$n$,$A^n$的整数部分$[A^n]$能被$k$整除



7. 求证：$\prod\limits_{k=1}^{134}(1+\cot k^{\circ})=2^{67}$

8. 已知 a，b 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，试证：对每一个自然数 n，有 $(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}$

9 （第42届IMO试题）对所有正实数 a，b，c，求证：$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1$

10.（2005年国家集训队测试题）设 a，b，$c\geqslant 0$，$ab+bc+ca=\frac{1}{3}$，证明：$\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leqslant 3$.





第■讲　合理代换

方法点津

对于一些结构较为复杂、变元较多，并且变元之间的关系比较难理顺的数学问题，我们常常引入一些新的变量进行代换，以简化其结构，达到顺利解决问题的目的. 合理的代换往往能简化题设的信息，使隐性条件显性化，从而有利于沟通量与量之间的联系，对发现解题的思路，优化解题的过程起到积极的推进作用.

代换法的本质是通过引进辅助元素进行映射转移，将分散条件联系起来. 如果将代换法进行细化，一般可将其分为以下十种类型：

1. 三角代换

三角函数蕴涵着丰富的公式与性质，巧妙地运用这些公式与性质可以顺利地解决许多综合问题. 如三角函数中有以下三个同角平方关系式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$. 利用这三个关系式，可对形如：$x^2-y^2=a^2$，$x^2-y^2=a^2$ 的式子进行代换处理，从而将一般的代数问题转化为三角问题.

2. 参数代换

有些数学问题直接解决较困难，通过引进参数，可使原来较难处理的问题得以巧妙过渡.

3. 整体代换

对于有些分式不等式问题，整体代换能起到积极有效的作用. 即若原问题是由若干个分式组合而成，可将其中每个分式进行整体代换，局部处理，从而使原问题"柳暗花明".

4. 分母代换

当一个分式的分子较简捷而分母相对较复杂时，通过对分母进行代换可以使解题思路变得更顺畅.



5. 减元代换

对于多元的问题，通过适当代换进行减元是解决问题、突破难点的一项重要策略。

6. 增量代换

对于几个有大小关系的变量，有时通过引进增量的方法，建立它们之间的等量关系，可以给解题带来意外的收获。

7. 分式代换

当已知条件中出现形如"$abc=1$"的式子时，运用分式代换能使原问题的解决峰回路转。

8. 高次代换

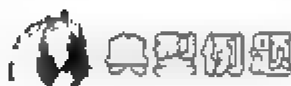
当已知条件中出现形如"$abc=1$"的式子时，除了运用以上的分式代换外，有时也可运用高次代换降次处理。

9. 均值代换

对于任意 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，若 $a_1+a_2+\cdots+a_n=c$，则可设 $a_1=\frac{c}{n}+t_1$，$a_2=\frac{c}{n}+t_2$，$\cdots$，$a_n=\frac{c}{n}+t_n$，其中 $t_1+t_2+\cdots+t_n=0$，此种代换称为均值代换。

10. 目标代换

运用目标代换的主要思路是将所求代数式用一个待定系数进行代换，并通过它建立不等关系，运用重要不等式，最后根据重要不等式求最值的条件确定待定系数的值。



典型例题

例1 设 $x, y, z\in \mathbf{R}^+$，$\sqrt{x^2+y^2}+z=1$，试求 $xy+2xz$ 的最大值。

解 令 $z=\sin^2\alpha$，$\sqrt{x^2+y^2}=\cos^2\alpha$，$x=\cos^2\alpha\sin\beta$，$y=\cos^2\alpha\cos\beta$，$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $xy+2xz=x(y+2z)=\cos^2\alpha\sin\beta(\cos^2\alpha\cos\beta+2\sin^2\alpha)$

$$=\frac{\sin\beta}{2-\cos\beta}(2-\cos\beta)\cos^2\alpha(\cos\beta\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)$$

$$=\frac{\sin\beta}{2-\cos\beta}(2\cos^2\alpha-\cos\beta\cos^2\alpha)(\cos\beta\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha)$$

$$\leqslant\frac{\sin\beta}{2-\cos\beta}\left(\frac{2\cos^2\alpha-\cos\beta\cos^2\alpha+\cos\beta\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha}{2}\right)^2=\frac{\sin\beta}{2-\cos\beta}$$

构造斜率可得，当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=z=\frac{1}{3}$ 时，$xy+2xz$ 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

评注 有时三角代换只是运用三角解决代数或几何问题的前奏，灵活运用两角和、差的正弦、余弦、正切公式以及三角的倍角、半角公式才是解决问题的核心技术．

例 2 （第 30 届 IMO 预选题）数列 $a_0, a_1, \cdots$ 与 $b_0, b_1, \cdots$ 定义如下：$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，$b_0 = 1$，$b_{n+1} = \frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n}$，$(n=0,1,2,\cdots)$，证明：对每一个 $n=0,1,2,\cdots$，有 $2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n$．

证明 $a_0 = \sin\frac{\pi}{2^2}$，假设 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$，则 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}} = \sin\frac{\pi}{2^{n+3}}$，

由此得 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$，同理 $b_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$．

因为当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin x < x < \tan x$，

所以 $a_n = \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} < \frac{\pi}{2^{n+2}}$，$b_n = \tan\frac{\pi}{2^{n+2}} > \frac{\pi}{2^{n+2}}$．

整理得 $2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n$．

评注 三角函数中的一些不等关系，如"当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin x < x < \tan x$"组成了三角不等关系系统，灵活运用往往能使解题如鱼得水．

例 3 设 x, y, z 是不全为零的实数，求 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值．

解 对分子或分母直接运用均值不等式显然达不到目标，为此，引入参数 a, b 作为待定系数进行代换，再运用均值不等式进行处理．

$$xy+2yz = 2\left(\sqrt{\frac{a}{2}}x\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}y\right)+2(\sqrt{b}y)\left(\sqrt{\frac{1}{b}}z\right) \leqslant \left(\frac{a}{2}x^2+\frac{1}{2a}y^2\right)+\left(by^2+\frac{1}{b}z^2\right)$$

$= \frac{a}{2}x^2+\left(\frac{1}{2a}+b\right)y^2+\frac{1}{b}z^2$，令 $\frac{a}{2} = \frac{1}{2a}+b = \frac{1}{b}$，解得 $a=\sqrt{5}$，$b=\frac{2\sqrt{5}}{5}$．

所以 $xy+2yz \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}(x^2+y^2+z^2)$，当 $10x = 2\sqrt{5}y = 5z$ 时等号成立．

故 $\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$．

评注 从以上解答可以发现，参数代换是一种"欲擒故纵"的策略，引进参数表面看好像增加了变量，而实际上却使本来较难解决的问题得以顺利解决．

例 4 对所有 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，求 $f(a,b,c) = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ 的



最小值

解 作如下代换：$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$，$y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}$，$z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$，

则 $x,y,z\in(0,+\infty)$，$x^2=\frac{a^2}{a^2+8bc}$，因此，$\frac{1}{x^2}-1=\frac{8bc}{a^2}$.

同理有 $\frac{1}{y^2}-1=\frac{8ac}{b^2}$，$\frac{1}{z^2}-1=\frac{8ab}{c^2}$.

将以上三式相乘，得 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$

假如 $x+y+z<1$，由于 $0<x<1$，$0<y<1$，$0<z<1$.

则 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)$

$=\frac{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}{x^2y^2z^2}$

$>\frac{[(x+y+z)^2-x^2][(x+y+z)^2-y^2][(x+y+z)^2-z^2]}{x^2y^2z^2}$

$=\frac{(y+z)(2x+y+z)(x+z)(2y+x+z)(x+y)(x+y+2z)}{x^2y^2z^2}$

$\geqslant\frac{2\sqrt{yz}\cdot4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot2\sqrt{xz}\cdot4\sqrt[4]{y^2xz}\cdot2\sqrt{xy}\cdot4\sqrt[4]{z^2xy}}{x^2y^2z^2}=512$，矛盾

所以，有 $x+y+z\geqslant1$，故当 $a=b=c$ 时，$f(a,b,c)$ 取得最小值 1.

评注 通过整体代换将原问题转化为条件最值问题，即"在 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)=512$ 成立的条件下，求 $x+y+z$ 的最小值"，可先从极端情况探求最小值，再运用反证法进行证明.

例 5 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求 $\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}$ 的最小值.

解 对分母进行代换，为此令 $b+3c=x$，$8c+4a=y$，$3a+2b=z$，则

$a=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}y+\frac{1}{6}z$，$b=\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}y+\frac{1}{4}z$，$c=\frac{1}{6}x+\frac{1}{16}y-\frac{1}{12}z$，

于是 $\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}=\frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)-\frac{61}{48}$

由均值不等式，得

$\frac{1}{8}\left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{z}{x}+\frac{9x}{z}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{4z}{y}+\frac{9y}{z}\right)-\frac{61}{48}$

$\geqslant\frac{1}{8}\times4+\frac{1}{6}\times6+\frac{1}{16}\times12-\frac{61}{48}=\frac{47}{48}$



等号当且仅当 $y=2x$，$z=3x$ 时取得.

因此，当 $a=10c$，$b=21c$ 时，$\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{8c+4a}+\frac{9c}{3a+2b}$ 取最小值 $\frac{47}{48}$.

评注 对于分子与分母均为齐次式的分式最值问题，一般我们最易想到的是运用 Cauchy 不等式处理，但有时处理起来并不奏效，这时进行分母代换是比较明智的选择.

例 6 设 $xy=1$，且 $x>y>0$，求 $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ 的最小值.

解 由于 $x>y>0$，可设 $x=y+\Delta y\ (\Delta y>0)$，则

$$\frac{x^2+y^2}{x-y}=\frac{(x-y)^2+2xy}{x-y}=\frac{(\Delta y)^2+2}{\Delta y}\geqslant 2\sqrt{2},$$

等号当且仅当 $\Delta y=\sqrt{2}$，即 $x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ 时取得.

评注 从本题的解答来看，引进增量也起到了换元的作用.

例 7 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\geqslant 0$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant k$，$k$ 为正常数，求

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{x_1\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2+x_n}$$ 的最大值.

解 设 $a=x_1$，$b=\sum_{i=2}^{n-1}x_i$，$c=x_n$，则 $a, b, c\geqslant 0$，$a+b+c\geqslant k$. 至此原函数从 n 元减少到三元，即有 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\frac{a\sqrt{a+b+c}}{(a+b)^2+c}\triangleq g(a, b, c)$.

进一步令 $s=a+b+c$，则 $s\geqslant k$.

$$g(a, b, c)=\frac{a\sqrt{s}}{(s-c)^2+c}\leqslant\frac{(s-c)\sqrt{s}}{(s-c)^2+c}=\frac{\sqrt{s}}{(s-c)+\frac{c}{s-c}}.$$

注意到 $(s-c)+\frac{c}{s-c}\geqslant 2\sqrt{s}-1\Leftrightarrow(c-s+\sqrt{s})^2\geqslant 0$.

故有 $g(a, b, c)\leqslant\frac{\sqrt{s}}{2\sqrt{s}-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{s}}}\leqslant\frac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{k}}}=\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k}-1}$.

当 $b=0$，$c=k-\sqrt{k}$，$a=\sqrt{k}$，即 $x_1=\sqrt{k}$，$x_2=x_3=\cdots=x_{n-1}=0$，$x_n=k-\sqrt{k}$ 时等号成立. 因此，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{k}}{2\sqrt{k}-1}$.

评注 本题在解答过程中进行了两次代换，使原问题从 n 元过渡到三元，又从三元



过渡到两元，减元思想可谓落实得淋漓尽致。

例 8 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^{+}$，且 $abc=1$，求 $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}$ 的最小值

解 设 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$，其中 $x, y, z\in\mathbf{R}^{+}$，则

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}=\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}+\frac{x}{x+2z}$$

由 Cauchy 不等式，得

$$[y(y+2x)+z(z+2y)+x(x+2z)]\left(\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}+\frac{x}{x+2z}\right)\geq(x+y+z)^2$$

因此，$\frac{y}{y+2x}+\frac{z}{z+2y}+\frac{x}{x+2z}\geq\frac{(x+y+z)^2}{[y(y+2x)+z(z+2y)+x(x+2z)]}=1$

即 $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\geq1$，等号当且仅当 $a=b=c=1$ 时取得

评注 本题直接运用 Cauchy 不等式有困难，通过分式代换后则显得比较容易。当然，本题也可通过先证明 $\frac{1}{2a+1}\geq\frac{a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}+c^{-\frac{2}{3}}}$ 而得到最小值

例 9 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^{+}$，且 $abc=1$，求 $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}$ 的最大值。

解 令 $a=x^3, b=y^3, c=z^3$，其中 $x, y, z\in\mathbf{R}^{+}$，则由已知条件有 $xyz=1$，用比较法易证明：$x^3+y^3\geq x^2y+y^2x$，从而有

$$\frac{1}{a+b+1}=\frac{1}{x^3+y^3+1}\leq\frac{1}{x^2y+xy^2+1}=\frac{1}{x^2y+xy^2+xyz}$$

$$=\frac{z}{xyz(x+y+z)}=\frac{z}{x+y+z}$$

同理，有 $\frac{1}{b+c+1}\leq\frac{x}{x+y+z}$，$\frac{1}{c+a+1}\leq\frac{y}{x+y+z}$

将以上三式相加，得 $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leq1$。

因此，当 $a=b=c=1$ 时，$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}$ 取得最大值 1

评注 本题运用的是高次代换的策略，当然也可仿例 8 运用分式代换得出解答。

例 10 设 $x>y>0$，$xy=1$，求 $\frac{3x^3+125y^3}{x-y}$ 的最小值

解 设所求最小值（目标）为正数 t，则 $\frac{3x^3+125y^3}{x-y}\geq t$，即 $3x^3+125y^3+yt\geq tx$

由 $xy=1$ 及均值不等式，可得

$3x^3+125y^3+yt=x^3+x^3+x^3+125y^3+yt$

$\geqslant 5\sqrt[5]{x^9\cdot 125y^4t}=5\sqrt[5]{125x^5t}=5\sqrt[5]{125tx}$，

令 $5\sqrt[5]{125tx}=tx$，解得 $t=25$，注意到以上不等式当且仅当 $x^3=125y^3=yt$ 时取等号，

因此，可解得当 $x=\sqrt{5}$，$y=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，$\frac{3x^3+125y^2}{x-y}$ 取最小值 25.

评注 本题运用的是目标代换的策略，目标代换体现的是"执果索因"的解题思想。当然本题也可运用增量代换法进行解答

例 11 （2006 年韩国奥林匹克试题）对于三个互不相同的实数 a_1，a_2，a_3 按如下方式定义三个实数 b_1，b_2，b_3，$b_i=\left(1+\frac{a_ia_j}{a_i-a_j}\right)\left(1+\frac{a_ia_k}{a_i-a_k}\right)$，其中 $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$，

求证 $|1+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant(1+|a_1|)(1+|a_2|)(1+|a_3|)$，并指出等号成立的条件。

证明 设 $A=\frac{a_1a_2}{a_1-a_2}$，$B=\frac{a_1a_3}{a_1-a_3}$，$C=\frac{a_2a_3}{a_2-a_3}$，则

$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=a_1(1+A)(1+B)+a_2(1-A)(1+C)+a_3(1-B)(1-C)$
$=a_1+a_2+a_3+(a_1-a_2)A+(a_1-a_3)B+(a_2-a_3)C+a_1AB-a_2AC+a_3BC$

通过计算，得 $(a_1-a_2)A+(a_1-a_3)B+(a_2-a_3)C=a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3$，

$a_1AB-a_2AC+a_3BC=a_1a_2a_3\cdot\frac{a_1^2(a_2-a_3)+a_2^2(a_3-a_1)+a_3^2(a_1-a_2)}{(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_1-a_3)}=a_1a_2a_3$.

因此，$|1+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|=|1+a_1+a_2+a_3+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_1a_2a_3|$

$\leqslant 1+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_1a_2|+|a_1a_3|+|a_2a_3|+|a_1a_2a_3|$

$=(1+|a_1|)(1+|a_2|)(1+|a_3|)$.

当且仅当七个实数 a_1，a_2，a_3，a_1a_2，a_1a_3，a_2a_3，$a_1a_2a_3$ 全为非负实数或非正实数时，上式等号成立。注意到 a_1，a_2，a_3 中至多只有一个为0，于是，当且仅当 a_1，a_2，a_3 全是非负实数时，上式等号成立。

例 12 （第四届中国女子奥林匹克竞赛试题）解方程组

$$\begin{cases}5\left(x+\frac{1}{x}\right)=12\left(y+\frac{1}{y}\right)=13\left(z+\frac{1}{z}\right) & ①\\ xy+yz+zx=1 & ②\end{cases}$$

解法一 ① 式可化为

$$\frac{x}{5(1+x^2)}=\frac{y}{12(1+y^2)}=\frac{z}{13(1+z^2)}. \quad ③$$

显然 x，y，z 同号，首先求正数解。



存在 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$，使得 $x = \tan\frac{\alpha}{2}$，$y = \tan\frac{\beta}{2}$，$z = \tan\frac{\gamma}{2}$，

则 $\sin\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$，$\sin\beta = \frac{2y}{1+y^2}$，$\sin\gamma = \frac{2z}{1+z^2}$，

③即 $\frac{\sin\alpha}{5} = \frac{\sin\beta}{12} = \frac{\sin\gamma}{13}$ ④

②式可化为 $\frac{1}{z} = \frac{x+y}{1-xy}$，即 $\cot\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$.

注意 $z \neq 0$，$xy \neq 1$，因为 $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$，所以 $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$，

即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

从而 α、β、γ 是某个三角形 ABC 的三个内角.

由④和正弦定理知，α、β、γ 所对的边 a、b、c 的比是 $5:12:13$.

所以，$\sin\alpha = \frac{5}{13}$，$\sin\beta = \frac{12}{13}$，$\sin\gamma = 1$.

从而 $x = \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$ 或 5，$y = \tan\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$，$z = \tan\frac{\gamma}{2} = 1$.

将 $z=1$ 代入②式，易知 x 和 y 均小于 1，所以 $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$ 是唯一正数解.

故原方程组有两组解，$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, -1\right)$.

解法二 显然 x, y, z 同号.

由②得 $x = \frac{1-yz}{y+z}$，代入①得

$$12\left(y+\frac{1}{y}\right) = 5\left(\frac{1-yz}{y+z} + \frac{y+z}{1-yz}\right)$$
$$= 5\frac{(1-yz)^2+(y+z)^2}{(y+z)(1-yz)} = 5\frac{(y^2+1)(z^2+1)}{(y+z)(1-yz)},$$

即 $5(z^2+1)y = 12(y+z)(1-yz)$.

同理 $5(y^2+1)z = 13(y+z)(1-yz)$.

整理得 $12y^2z + 17yz^2 = 7y + 12z$，$18y^2z + 13yz^2 = 13y + 8z$.

两式相加，得 $30yz(y+z) = 20(y+z)$，

所以 $yz = \frac{2}{3}$，$y = \frac{2}{3z}$，代入①解得 $z = \pm 1$.

故原方程组有两组解：$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, -1\right)$.

解法三 $x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+xy+yz+zx}{x} = \frac{(x+y)(x+z)}{x}$，



所以①可变为 $5yz(x+y)(x+z)=12xz(y+z)(y+x)$

$$=13xy(z+x)(z+y) \quad ⑤$$

设 $\begin{cases} x(y+z)=a, \\ y(z+x)=b, \\ z(x+y)=c, \end{cases}$

则由②得 $a+b+c=2$. ⑥

⑤变为 $5bc=12ca=13ab \Leftrightarrow \dfrac{5}{a}=\dfrac{12}{b}=\dfrac{13}{c}=k$ ⑦

⑦代入⑥,得 $\dfrac{5}{k}+\dfrac{12}{k}+\dfrac{13}{k}=2$,所以 $k=15$.

进而 $\begin{cases} xy+xz=\dfrac{5}{15}, \\ yz+xy=\dfrac{12}{15}, \\ zx+zy=\dfrac{13}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=\dfrac{10}{15}, \\ zx=\dfrac{3}{15}, \\ xy=\dfrac{2}{15}. \end{cases}$

三式相乘,得 $xyz=\pm\sqrt{\dfrac{10}{15}\cdot\dfrac{3}{15}\cdot\dfrac{2}{15}}=\pm\dfrac{2}{15}$.

故原方程组有两组解:$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{3},1\right)$和$\left(-\dfrac{1}{5},-\dfrac{2}{3},-1\right)$.

解法四 设 $5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=13\left(z+\dfrac{1}{z}\right)=k$,则

$\dfrac{k}{x+\dfrac{1}{x}}=5$, $\dfrac{k}{y+\dfrac{1}{y}}=12$, $\dfrac{k}{z+\dfrac{1}{z}}=13$.

所以 $\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2}$.

即 $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^2+\left(\dfrac{y}{y^2+1}\right)^2=\left(\dfrac{z}{z^2+1}\right)^2$. ⑧

又 $x^2+1=x^2+xy+yz+zx=(x+y)(x+z)$,

所以⑧式可化为

$$\frac{x^2}{(x+y)^2(x+z)^2}+\frac{y^2}{(y+z)^2(y+x)^2}=\frac{z^2}{(z+x)^2(z+y)^2},$$

即 $2x^2y^2+2x^2yz+2xy^2z=2xyz^2$,

$2xy(xy+yz+zx)=2xyz^2$,

$xy=xyz^2$.



又 $x, y, z \neq 0$，所以 $z^2=1$，原方程的两组解为 $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, 1\right)$ 和 $\left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, -1\right)$。

评注 以上解法分别运用了三角代换、减元代换、整体代换与目标代换的技巧，从不同角度对原题进行了巧妙解析，充分展示了代数变形的魅力。

例 13 （2003 年中国数学奥林匹克题）设 a, b, c, d 为正实数，满足 $ab+cd=1$，点 $P_i(x_i, y_i)(i=1, 2, 3, 4)$ 是以原点为圆心的单位圆周上的四个点。求证：

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2 \leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right)$$

证法一 将欲证不等式左边结构形态进行替换、变更、转换，即

令 $u=ay_1+by_2$，$v=cy_3+dy_4$，$u_1=ax_4+bx_3$，$v_1=cx_2+dx_1$，则

$u^2 \leqslant (ay_1+by_2)^2+(ax_1-bx_2)^2=a^2+b^2+2ab(y_1y_2-x_1x_2)$，

即 $\quad x_1x_2-y_1y_2 \leqslant \dfrac{a^2+b^2-u^2}{2ab}$。 ①

$v_1^2 \leqslant (cx_2+dx_1)^2+(cy_2-dy_1)^2=c^2+d^2+2cd(x_1x_2-y_1y_2)$，

即 $\quad y_1y_2-x_1x_2 \leqslant \dfrac{c^2+d^2-v_1^2}{2cd}$。 ②

① + ② 得

$$0 \leqslant \frac{a^2+b^2-u^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-v_1^2}{2cd},$$

即 $\quad \dfrac{u^2}{ab}+\dfrac{v_1^2}{cd} \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{ab}+\dfrac{c^2+d^2}{cd}$。

同理，$\dfrac{v^2}{cd}+\dfrac{u_1^2}{ab} \leqslant \dfrac{c^2+d^2}{cd}+\dfrac{a^2+b^2}{ab}$。

由 Cauchy 不等式，有

$$\begin{aligned}(u+v)^2+(u_1+v_1)^2 &= \left(\sqrt{ab}\cdot\frac{u}{\sqrt{ab}}+\sqrt{cd}\cdot\frac{v}{\sqrt{cd}}\right)^2+\left(\sqrt{ab}\cdot\frac{u_1}{\sqrt{ab}}+\sqrt{cd}\cdot\frac{v_1}{\sqrt{cd}}\right)^2 \\ &\leqslant (ab+cd)\left(\frac{u^2}{ab}+\frac{v^2}{cd}\right)+(ab+cd)\left(\frac{u_1^2}{ab}+\frac{v_1^2}{cd}\right) \\ &= \frac{u^2}{ab}+\frac{v^2}{cd}+\frac{u_1^2}{ab}+\frac{v_1^2}{cd} \\ &\leqslant 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right)\end{aligned}$$

证法二 将欲证不等式左边形态进行恒等变形转换。令 $ay_1+by_2+cy_3+dy_4=\alpha$，$ax_4+bx_3+cx_2+dx_1=\beta$。

由 Cauchy 不等式，有

$\alpha^2=(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2$



$$=\left(\sqrt{ad}y_1\cdot\sqrt{\frac{a}{d}}+\sqrt{bc}y_2\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{bc}y_3\cdot\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{ad}y_4\cdot\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2$$

$$\leqslant\left[(\sqrt{ad}y_1)^2+(\sqrt{bc}y_2)^2+(\sqrt{bc}y_3)^2+(\sqrt{ad}y_4)^2\right]\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{d}{a}}\right)^2\right]$$

$$=(ady_1^2+bcy_2^2+bcy_3^2+ady_4^2)\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right).$$

同理，$\beta^2\leqslant(adx_1^2+bcx_2^2+bcx_3^2+adx_4^2)\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)$

以上两式相加，并利用 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4)$，$ab+cd=1$ 得

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant(2ad+2bc)\left(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a}\right)=2(ad+bc)\left(\frac{ab+cd}{ac}+\frac{ab+cd}{bd}\right)$$

$$=2(ad+bc)\left(\frac{1}{ac}+\frac{1}{bd}\right)=2\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)=2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}\right).$$

例 14 （1998 年加拿大奥林匹克试题）设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是正实数，满足条件 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n+1}}=1$，求证：$x_1x_2\cdots x_{n+1}\geqslant n^{n+1}$.

证明 令 $y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$i=1,2,\cdots,n+1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}y_i=1$，令 $s_i=\sum\limits_{j\neq i}y_j$，$p_i=\prod\limits_{j\neq i}y_j$.

由算术—几何不等式，有 $\frac{1-y_i}{y_i}=\frac{s_i}{y_i}\geqslant\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}$.

因为在乘积 $\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}$ 中，每个 $\sqrt[n]{y_i}$ 恰出现 n 次，因此，$\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}=\prod\limits_{i=1}^{n+1}y_i$.

故 $x_1x_2\cdots x_{n+1}=\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)\geqslant\prod\limits_{i=1}^{n+1}\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}=n^{n+1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}y_i}{\prod\limits_{i=1}^{n+1}y_i}=n^{n+1}$.

评注 本题运用分式的整体代换得以巧妙解答，事实上，这是一道很值得探究的题目. 因为以上命题表明：如果正数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 满足条件：$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1-\frac{1}{1+x_{n+1}}$，则有 $x_{n+1}\leqslant\frac{n^{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n}x_i}$，因此，$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant1-$



$$\frac{1}{1+\frac{n^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n} x_i}}=\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$$ 由此可以引出以下新命题

如果 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}<1$，则有 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geq\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

又因为当 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geq 1$，上述不等式显然成立. 因此，又可得以下命题：

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数，$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geq\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$，

而由此命题又可推出以下一系列结果：

(1) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，则 $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2a}\geq\frac{8}{8+4}=\frac{2}{3}$；

(2) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$，$\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+a}\leq\frac{2}{3}$.

(3) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\frac{x_1}{x_1+nx_2}+\frac{x_2}{x_2+nx_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+nx_1}\geq\frac{n}{n+1}$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

(4) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\frac{x_1}{nx_1+x_2}+\frac{x_2}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{nx_n+x_1}\leq\frac{n}{n+1}$，其中等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

例 15 已知 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$，求证：

$$\frac{\sqrt{2}\sin\theta_1-1}{\cos\theta_1}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_2-1}{\cos\theta_2}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_3-1}{\cos\theta_3}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_4-1}{\cos\theta_4}\geq 0$$

证明 令 $a=\tan\theta_1$，$b=\tan\theta_2$，$c=\tan\theta_3$，$d=\tan\theta_4$，则 $a,b,c,d>0$，

且由 $\tan(\theta_1+\theta_2)+\tan(\theta_3+\theta_4)=0$ 知 $\frac{a+b}{1-ab}+\frac{c+d}{1-cd}=0$.

所以 $(a+b)(1-cd)+(c+d)(1-ab)=0\Leftrightarrow a+b+c+d=abc+bcd+cda+dab$，

由于
$$\begin{aligned}(a+b)(a+c)(a+d)&=a^2(a+b+c+d)+abc+bcd+cda+dab\\&=(a^2+1)(a+b+c+d)，\end{aligned}$$

即 $\frac{a^2+1}{a+b}=\frac{(a+c)(a+d)}{a+b+c+d}$.



同理 $\frac{b^2+1}{b+c}=\frac{(b+d)(b+a)}{a+b+c+d}$，$\frac{c^2+1}{c+d}=\frac{(c+a)(c+b)}{a+b+c+d}$，$\frac{d^2+1}{d+a}=\frac{(d+b)(d+c)}{a+b+c+d}$，

这样，$\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}$

$$=\frac{(a+c)(a+d)+(b+d)(b+a)+(c+a)(c+b)+(d+b)(d+c)}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da+ac+bd)}{a+b+c+d}$$

$=a+b+c+d.$

由 Cauchy 不等式可得

$$2(a+b+c+d)^2$$

$$=2(a+b+c+d)\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$=[(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)]\left(\frac{a^2+1}{a+b}+\frac{b^2+1}{b+c}+\frac{c^2+1}{c+d}+\frac{d^2+1}{d+a}\right)$$

$$\geqslant(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1})^2,$$

所以 $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}+\sqrt{d^2+1}\leqslant\sqrt{2}(a+b+c+d)$，

即 $\frac{1}{\cos\theta_1}+\frac{1}{\cos\theta_2}+\frac{1}{\cos\theta_3}+\frac{1}{\cos\theta_4}\leqslant\sqrt{2}\left(\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}+\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}+\frac{\sin\theta_3}{\cos\theta_3}+\frac{\sin\theta_4}{\cos\theta_4}\right)$

即 $\frac{\sqrt{2}\sin\theta_1-1}{\cos\theta_1}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_2-1}{\cos\theta_2}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_3-1}{\cos\theta_3}+\frac{\sqrt{2}\sin\theta_4-1}{\cos\theta_4}\geqslant0$

综上可知原不等式成立.

评注 三角换元是解决许多代数问题的重要技巧之一，而将三角问题代换为一般的代数问题虽不多见，但通过本例可以发现此法有时也有其简化计算的特殊功效.

例 16 （2006 年全国高中数学联赛试题）解方程组：

$$\begin{cases}x-y+z-w=2,\\x^2-y^2+z^2-w^2=6,\\x^3-y^3+z^3-w^3=20,\\x^4-y^4+z^4-w^4=66.\end{cases}$$

解 考虑更一般的情形，解如下方程组 $\begin{cases}x-y+z-w=s_1,\\x^2-y^2+z^2-w^2=s_2,\\x^3-y^3+z^3-w^3=s_3,\\x^4-y^4+z^4-w^4=s_4.\end{cases}$

为此，作如下代换：



$$\begin{cases} b_1 = s_1; \\ b_2 = \dfrac{1}{2}(s_1^2 - s_2); \\ b_3 = \dfrac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3); \\ b_4 = \dfrac{1}{24}(s_1^4 - 6s_1^2s_2 + 3s_2^2 + 8s_1s_3 - 6s_4). \end{cases} \quad (*)$$

令 $p = x + z$，$q = xz$，$m = y + w$，$n = yw$，有

$$\begin{cases} p^2 = x^2 + z^2 + 2q; \\ p^3 = x^3 + z^3 + 3pq; \\ p^4 = x^4 + z^4 + 4p^2q - 2q^2. \end{cases}$$

同理有

$$\begin{cases} m^2 = y^2 + w^2 + 2n; \\ m^3 = y^3 + w^3 + 3mn; \\ m^4 = y^4 + w^4 + 4m^2n - 2n^2. \end{cases}$$

在此记号系统下，原方程组的第一个方程为 $p = m + s_1$. ①

式①两边平方得 $p^2 = m^2 + 2ms_1 + s_1^2$.

把 p^2，m^2 代入上式得 $x^2 + z^2 + 2q = y^2 + w^2 + 2n + 2ms_1 + s_1^2$.

化简得 $q = n + ms_1 + \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2)$

即 $$q = n + mb_1 + b_2.$$ ②

下面对式①两边立方得 $p^3 = m^3 + 3m^2s_1 + 3ms_1^2 + s_1^3$.

消去 p^3，m^3 有 $x^3 + z^3 + 3pq = y^3 + w^3 + 3mn + 3m^2s_1 + 3ms_1^2 + s_1^3$.

化简得 $s_3 + 3pq = 3mn + 3m^2s_1 + 3ms_1^2 + s_1^3$.

消去 p，q 得 $s_3 + 3(m + s_1)\left[n + ms_1 + \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2)\right]$

$$= 3mn + 3m^2s_1 + 3ms_1^2 + s_1^3.$$

整理得 $b_2m + b_1n = -\frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3) = -b_3$. ③

对式①两边4次方得 $p^4 = m^4 + 4m^3s_1 + 6m^2s_1^2 + 4ms_1^3 + s_1^4$.

消去 p^4，m^4 并化简得

$$s_4 + 4p^2q - 2q^2 = 4m^2n - 2n^2 + 4m^3s_1 + 6m^2s_1^2 + 4ms_1^3 + s_1^4.$$

先把 $p = m + b_1$，$q = n + mb_1 + b_2$ 代入上式得

$$4b_1m^2 + 4mb_1b_2 + 4nb_1^2 + 4b_1mn - 4b_2n = s_1^4 - s_4 - 4b_1b^2 + 2b_2^2.$$



再把 $n=\frac{b_3-b_2m}{b_1}$ 代入,化简得

$$(b_2^2-b_1b_3)m=\frac{1}{4}(s_1^4-s_4-4b_2b_1^2+2b_2^2+4b_1b_3)b_1-b_1b_2.$$

最后化简式子:$\frac{1}{4}(s_1^4-s_4-4b_2b_1^2+2b_2^2+4b_1b_3)b_1$.

把 b_1, b_2, b_3 用 s_1, s_2, s_3 表示有

$\frac{1}{4}(s_1^4-s_4-4b_2b_1^2+2b_2^2+4b_1b_3)b_1$

$=\frac{1}{4}\left[s_1^4-s_4-4\cdot\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)s_1^2+2\cdot\frac{1}{4}(s_1^2-s_2)^2+4s_1\cdot\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)\right]b_1$

$=\frac{1}{24}(s_1^4-6s_1^2s_2+3s_2^2+8s_1s_3-6s_4)b_1$

$=b_4b_1$.

所以

$$(b_2^2-b_1b_3)m=b_4b_1-b_1b_2. \qquad ④$$

故由式①—式④可组成方程组

$$\begin{cases}p=m+s_1,\\q=n+mb_1+b_2,\\b_2m+b_1n=-b_3,\\(b_2^2-b_1b_3)m=b_4b_1-b_1b_2.\end{cases}$$

若 $b_2^2-b_1b_3=\frac{1}{12}(s_1^4-4s_1s_3+3s_2^2)\neq0$,解方程组得 $\begin{cases}m=\frac{b_4b_1-b_1b_2}{b_2^2-b_1b_3},\\n=\frac{b_3^2-b_4b_2}{b_2^2-b_1b_3},\\p=b_1+m,\\q=b_2+b_1m+n.\end{cases}$

根据韦达定理,原方程组的解等价于2个一元二次方程 $t^2-pt+q=0$, $t^2-mt+n=0$ 的解,因此原方程组的通解是:x(或 z)$=\frac{1}{2}(p\pm\sqrt{p^2-4q})$,$y$(或 w)$=\frac{1}{2}(m\pm\sqrt{m^2-4n})$.

若 $b_2^2-b_1b_3=\frac{1}{12}(s_1^4-4s_1s_3+3s_2^2)=0$,则方程组可能有无数解或无解



习题精选3

1. 求函数 $y=\frac{2+x}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ 的值域.

2. (1990年匈牙利竞赛试题)设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{\sqrt{1+a_n^2}-1}{a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明 $a_n>\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

3. (1990年越南奥林匹克试题)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$, 且 $abc+a+c=b$, 试确定 $p=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$ 的最大值.

4. 数列 $\{a_n\}$ 由公式 $\begin{cases}a_1=1\\a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})\end{cases}$ $(n=1,2,\cdots)$, 求 a_n 的通项.

5. 设 $\triangle ABC$ 的边长分别为 a,b,c, 外接圆、内切圆半径分别为 R,r, 证明: $\frac{R}{2r}\geqslant\left(\frac{64a^2b^2c^2}{[4a^2-(b-c)^2][4b^2-(c-a)^2][4c^2-(a-b)^2]}\right)^2$.

6. (第33届IMO预选试题)如果 $x,y,z>1$, 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$, 证明: $\sqrt{x+y+z}\geqslant\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

7. (2006年土耳其国家队选拔试题)已知正数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx=1$, 证明: $\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2\geqslant6\sqrt{3}$.

8. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, 且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. 求证: $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy}\geqslant\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

9. 已知 x,y,z 都是正数, 求证: $x(y+z-x)^2+y(z+x-y)^2+z(x+y-z)^2\geqslant2xyz\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$, 等号当且仅当 $x=y=z$ 时成立.

10. 已知正数 $m_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, $p\geqslant2$ 且 $p\in\mathbf{N}$, 并满足 $\frac{1}{1+m_1^p}+\frac{1}{1+m_2^p}+\cdots$



$+\frac{1}{1+m_n^2}=1$. 求证：$m_1m_2\cdots m_n\geqslant(n-1)^{\frac{n}{2}}$

11．(2002 年全国联赛试题)实数 a,b,c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实数根 x_1,x_2,x_3，且满足

(1) $x_2-x_1=\lambda$；(2) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值.

12．设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\left(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\geqslant 6$.

13．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，求证：$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right)\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$.

14．(第 34 届 IMO 预选试题)对所有的正实数 a,b,c,d，证明：$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geqslant\frac{2}{3}$.



第[illegible]讲　加强命题

方法点津

数列与不等式都是数学竞赛中的重点内容，将两者结合起来的问题，我们称之为数列不等式问题。数列不等式问题，是近年来各级各类数学竞赛命题新宠。解决该类问题，有时既要用到不等式的思路与方法，又要结合数列本身的结构与性质，因此，它是考查学生思维品质的良好素材。

笔者通过研究发现，有些数列不等式问题直接证明原问题比证明其某个加强命题更困难，这时，我们不妨"欲擒故纵"，先通过证明原问题的某个"更强的命题"，从而"顺手牵羊"地解决原问题。这种方法我们称之为加强命题法，它是证明数列不等式问题的一种有效方法。从不等式的结构形式看，加强命题证明数列不等式可分为三类：

1. 同侧加强

对所证不等式的同一方向（可以是左侧，也可以是右侧）进行加强，如欲证 $f(n)<A$，只要证明 $f(n)<A-B(B>0)$。其中 B 的探寻可通过分析、归纳或直接放缩得到。

2. 异侧加强

对所证不等式的异侧进行加强，如要证 $f(n)<A$，可先证明 $B<f(n)<A$（$A>B$）。异侧加强能为数学归纳法从 k 到 $k+1$ 的顺利过渡创造条件。因此，它往往与数学归纳法"联袂登台"。

3. 双向加强

有些不等式，往往是某个一般性命题的特殊情况，这时不妨"返璞归真"，通过双向加强还原其本来面目，从而顺利解决原不等式。其基本原理为：欲证明 $A<f(n)<B$，只要证明 $A+C<f(n)<B-C(C>0,A>B)$。

典型例题

例 1 求证：对一切 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<3$.

解 不等式左边是数列 $\left\{\frac{1}{n\sqrt{n}}\right\}$ 的前 n 项和，右边是一常数，因此，直接用数学归纳法是不可行的.注意到 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}$，而 $\frac{1}{k\sqrt{k}}<\frac{1}{k\sqrt{k-1}}$ $(k\geqslant 2)$，故可先用放缩法证明以下加强不等式：$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k-1}}<2$.

由
$$\frac{1}{k\sqrt{k-1}}=\frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}}=\frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}$$
$$=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)(k=1,2,3,\cdots,n),$$

得
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k-1}}<2\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<2$$

故
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k-1}}<1+2=3.$$

例 2 （2004 年中国数学奥林匹克试题）给定正整数 $n\geqslant 2$，设正整数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足：$a_1<a_2<\cdots<a_n$ 及 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$. 求证：对任意实数 x，有 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.

解 根据已知条件 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$ 及所求证不等式的结构，不难想到运用 Cauchy 不等式先进行放缩，得到 $\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}$，再通过构造递推关系证明原不等式的加强不等式.由 Cauchy 不等式及 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right]\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2},$$

故要证原不等式，只需证明下列不等式成立：$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$.

为此，可先证明下列更强的命题：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)+x^2}\right]$$，其中 $a_{k+1}>a_k$ 为正整数.

令 $b_n=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)+x^2}\right]$，由 $a_{k+1}\geqslant a_k+1$，得

$$\begin{aligned}b_k-b_{k-1}&=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)+x^2}\right]\\&\quad-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_k(a_k-1)+x^2}\right]\\&=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_k(a_k-1)+x^2}-\frac{1}{a_{k+1}(a_{k+1}-1)+x^2}\right]\\&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_k(a_k-1)+x^2}-\frac{1}{(a_k+1)\cdot a_k+x^2}\right]\\&=\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2-a_k^2}\geqslant\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}(k\geqslant 2).\end{aligned}$$

又
$$\begin{aligned}b_1&=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_2(a_2-1)+x^2}\right]\\&\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{(a_1+1)a_1+x^2}\right]=\frac{a_1}{(a_1^2+x^2)^2-a_1^2}>\frac{a_1}{(a_1^2+x^2)^2}\end{aligned}$$

又 $b_n=b_1+\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})\geqslant\frac{a_1}{(a_1^2+x^2)^2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}$.

所以
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(a_k^2+x^2)^2}&\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}-\frac{1}{a_{n+1}(a_{n+1}-1)+x^2}\right]\\&<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}\end{aligned}$$

评注 命题者提供的解法分 $x^2\geqslant a_1(a_1-1)$ 与 $x^2<a_1(a_1-1)$ 两种情况讨论，尤其是后者的证明技巧性较强. 具体可参考本书第6讲练习15.

例3 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\frac{1+2a_n}{1+a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$，求证：$a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

解 由于不等式右边为常数，因此，直接运用数学归纳法很难实现从 k 到 $k+1$ 的过渡. 为此，可先证明原不等式的加强不等式 $0<a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



用数学归纳法证明原不等式的加强命题 $0<a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=1\in\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ 命题成立；

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，即 $0<a_k<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则当 $n=k+1$ 时，一方面有 $a_{k+1}=\frac{1+2a_k}{1+a_k}>0$，另一方面，有 $a_{k+1}=\frac{1+2a_k}{1+a_k}=2-\frac{1}{a_k+1}<2-\frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，

因此，当 $n=k+1$ 时命题也成立.

由(1)，(2) 可知 $0<a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

所以 $a_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 得证.

评注 本题也可先求出数列 $\{a_n\}$ 的通项，再运用放缩法证得.

例 4 (第 9 届加拿大数学奥林匹克试题) 设 $0<a<1$，定义 $a_1=1+a$，$a_n=\frac{1}{a_{n-1}}+a$，$n\geqslant 2$，证明：对一切自然数 n，都有 $a_n>1$.

解 用数学归纳法证明以下加强命题 $1<a_n<\frac{1}{1-a}$.

(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=1+a$，由 $0<a<1$ 显然有 $1<1+a<\frac{1}{1-a}$ 成立，即当 $n=1$ 时命题成立；

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，即 $1<a_k<\frac{1}{1-a}$，当 $n=k+1$ 时，

一方面，$a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a>\frac{1}{\frac{1}{1-a}}+a=(1-a)+a=1$，

另一方面 $a_{k+1}=\frac{1}{a_k}+a<1+a=\frac{1-a^2}{1-a}<\frac{1}{1-a}$.

因此，当 $n=k+1$ 时，有 $1<a_{k+1}<\frac{1}{1-a}$.

由(1)，(2) 可知，不等式 $1<a_n<\frac{1}{1-a}$ 对一切自然数都成立，当然也就有 $a_n>1$ 成立.

评注 从表面看，加强命题似乎使原问题变复杂了，而实际上，通过加强命题可以



换来一个较强的归纳假设，从而为归纳过渡的顺利完成奠定坚实的基础，反而有利于原问题的有效解决.

例 5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，求证 $14<a_{100}<17$.

解 用放缩法证明以下加强命题：$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}\,(n>2)$.

当 $k>1$ 时，$a_k^2=\left(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2>a_{k-1}^2+2$，即 $a_k^2-a_{k-1}^2>2$.

所以 $a_n^2-a_1^2=\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)>2(n-1)$，化简得 $a_n>\sqrt{2n-1}$.

同理，由 $a_k^2=\left(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2<a_{k-1}^2+3$ 可证得右边 $a_n<\sqrt{3n-2}\,(n>2)$.

令 $n=100$，得 $\sqrt{199}<a_{100}<\sqrt{298}$，而 $14<\sqrt{199}$，$17>\sqrt{298}$.
所以 $14<a_{100}<17$.

例 6 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2, a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$，求证：$1<a_n<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

解 数列 $\{a_n\}$ 的递归函数为 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}$，由 $f(x)=x$ 求得其不动点为 $\pm\sqrt{2}$. 为此，可求出通项公式再进行放缩证明，当然，也可不求通项公式，先证明其加强命题 $\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$ 而得证.

先用数学归纳法证明加强命题：对一切正整数 n，有 $\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$.

(1) 当 $n=1$ 时，$\sqrt{2}<a_1=2<\sqrt{2}+1$ 显然成立；

(2) 假设 $n=k$ 时，有 $\sqrt{2}<a_k<\sqrt{2}+\frac{1}{k}$，那么，

当 $n=k+1$ 时，一方面由均值不等式，有 $a_{k+1}=\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，等号当且仅当 $a_k=\sqrt{2}$ 时取得，因此，$a_{k+1}>\sqrt{2}$.

另一方面，$a_{k+1}=\frac{a_k}{2}+\frac{1}{a_k}<\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{k}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2k}\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，$\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}$ 也成立.

因此，$1<\sqrt{2}<a_n<\sqrt{2}+\frac{1}{n}<\frac{3}{2}+\frac{1}{n}$.

例 7 （第 42 届 IMO 预选试题）设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in\mathbf{R}_+$，求证



$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}$$

解 考虑加强命题：对任意的 $a>0$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{a+x_1^2+\cdots+x_k^2}<f(n,a)$$

用数学归纳法证明.

由 $n=1$ 及题设结论猜想 $f(n,a)=\sqrt{\frac{n}{a}}$.

归纳过渡时，可对后 $n-1$ 项用归纳假设，即证

$$\frac{x_1}{a+x_1^2}+f(n-1,a+x_1^2)\leqslant f(n,a)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1}{\sqrt{a+x_1^2}}\leqslant\frac{\sqrt{n(a+x_1^2)}-\sqrt{(n-1)a}}{\sqrt{a}}$$

由于 $\sqrt{a+x_1^2}>\sqrt{a}$，故只须证

$$x_1\leqslant\sqrt{n(a+x_1^2)}-\sqrt{(n-1)a}\Leftrightarrow a+(n-1)x_1^2\geqslant 2\sqrt{(n-1)a}\,x_1,$$

此不等式显然成立，从而原不等式成立.

例8 设正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}<e\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

解 考虑加强命题 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant e\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. ①

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

假设式①对 $n-1$ 成立，即

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\leqslant e\sum_{k=1}^{n-1}a_k \quad ②$$

下面只须证 $ea_n+(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}\geqslant(n+1)\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

注意到 $e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，由均值不等式得

$ea_n+(n-1)\sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}$

$\geqslant n\sqrt[n]{ea_1a_2\cdots a_n}>n\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_1a_2\cdots a_n}$

$=(n+1)\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

评注 对形如 $\sum\frac{f(k)}{S_k}<\sum\frac{1}{a_k}$ ①

其中 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$ 这类不等式，可考虑加强命题——在式①的左边加上……



项$\frac{g(n)}{S_n}$后，用数学归纳法证明. 例如：

(1) 设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$，$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 则$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} < 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ 可加强为

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} + \frac{n^2}{2S_n} < 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

(2) 设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^+$，$S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. 则$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{ak + \frac{a^2}{4}}{S_k} < \frac{(a+2)^2}{4} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

可加强为$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{ak + \frac{a^2}{4}}{S_k} + \frac{n}{S_n} \leqslant \frac{(a+2)^2}{4} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$

例9 (第11届土耳其集训队选拔试题)设函数$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$满足，对于任意的$x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，$t \in (0, 1)$，均有$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$.

证明：对于所有实数$a_1, a_2, \cdots, a_{2000}$，且$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{2000}$，$a_{2001} = a_1$，有

$$\sum_{k=1}^{2000} f(a_{k+1})a_k \leqslant \sum_{k=1}^{2000} f(a_k)a_{k+1}$$

证明 我们可以证明一个更强的结论.

若$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$，$a_{n+1} = a_1$ $(n \geqslant 2)$，则有

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_{k+1})a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(a_k)a_{k+1}.$$

当$n=2$时，命题显然成立(因为此时为等号)

设$n=m$时，命题成立.

当$n = m+1$时，对$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{m+1}$，$b_{m+2} = b_1$，有

$$\sum_{k=1}^{m+1} f(b_{k+1})b_k - \sum_{k=1}^{m+1} f(b_k)b_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} f(b_{k+1})b_k - \sum_{k=1}^{m-1} f(b_k)b_{k+1} + f(b_{m+1})b_m$$
$$+ f(b_1)b_{m+1} - f(b_m)b_{m+1} - f(b_{m+1})b_1$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m-1} f(b_{k+1})b_k + f(b_1)b_m - \sum_{k=1}^{m-1} f(b_k)b_{k+1} - f(b_m)b_1\right]$$
$$- [(b_1 - b_{m+1})f(b_m) - (b_1 - b_m)f(b_{m+1}) - (b_m - b_{m+1})f(b_1)]$$

由假设知第一个多项式小于或等于0.

由$f(x)$是凸函数知第二个多项式小于或等于0.

所以，当$n=m+1$时，命题成立.



综上可知，此结论成立.

当 $n=2003$ 时，即为本题.

例 10 令 $b_1=1$，对大于 1 的正整数 n，令 $b_n=b_{n-1}\cdot n^{f(n)}$，$f(n)=2^{-n}$.

求证：对所有的正整数 n，$b_n<3$.

证明 若由归纳假设得到 $b_k<3$，则

$$b_{k+1}=b_k(k+1)^{f(k+1)}<3\cdot(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}}.$$

而 $(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}}$ 是一个大于 1 的数，不可能由上面的不等式进一步推出 $b_{k+1}<3$.

这就是说，在 b_n 与 3 之间，需要一个隔离，即不让 b_n 直接小于 3，而是一个小于 3 的式子(最好是 n 的函数式).

为此，我们把结论加强为证明 $b_n<3\cdot n^{-\frac{1}{2^{n-1}}}$ ①

对①式运用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$b_1=1<3$.

当 $n=2$ 时，$b_2=b_1\cdot 2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{4}}<\frac{3}{2}<3\cdot 2^{-\frac{1}{2}}$.

当 $n=3$ 时，$b_3=2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{2}{8}}\cdot 3^{\frac{1}{8}}<3\cdot 3^{-\frac{1}{4}}$.

所以，$n=1,2,3$ 时，①式成立.

假设①式对 $k\geq 3$ 时成立，即 $b_k<3\cdot k^{-\frac{1}{2^{k-1}}}$.

则 $b_{k+1}=b_k\cdot(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}}<3\cdot k^{-\frac{1}{2^{k-1}}}\cdot(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}}$. ②

下面需要证明 $k^{-\frac{1}{2^{k-1}}}(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}}<(k+1)^{-\frac{1}{2^{k}}}$.

即 $(k+1)^{\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k}}}<k^{\frac{1}{2^{k-1}}}$.

从而等价于证明 $(k+1)^3<k^4\ (k\geq 3)$ ③

针对③式，再一次用数学归纳法.

$k=3$ 时，$4^3<3^4$，所以，$k=3$ 时，③式成立.

设 $k=m$ 时，③式成立，则 $(m+1)^3<m^4\quad(m\geq 3)$.

那么，$k=m+1$ 时，$(m+1)^4-(m+2)^3$

$=m^4+4m^3+6m^2+4m+1-(m+1)^3-3(m+1)^2-3(m+1)-1$

$>4m^3+6m^2+4m+1-3m^2-6m-3-3m-3-1$

$=4m^3+3m^2-5m-6$

$=4m^2(m-3)+9m(m-3)+22(m-3)+60>0$.

于是，对所有 $k\geq 3$ 的自然数，③式成立. 从而 $n=k+1$ 时，②式成立，

由以上，对所有正整数①式成立.

又由于 $n^{-\frac{1}{2^{n-1}}}<1$，从而由①式，有 $b_n<3\cdot n^{-\frac{1}{2^{n-1}}}<3$.



习题精选 4

1. 已知 n 为正整数，求证：$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}$。

2. 如果 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，试证明：$n\geqslant 2$ 时，有 $a_n^2\geqslant 2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$。

3. 求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(k+2)!+(k+1)!+k!}<\frac{1}{2}$。

4. 已知正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$，证明：$a_n<\frac{1}{n}$。

5. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}$。

6. 设正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sqrt{n}$，求证：对 $n\geqslant 1$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2>\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。

7. 已知 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，求证：$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$。

8. 已知 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & a_na_{n+1}\text{ 为偶数时；}\\ a_{n+1}-a_n, & a_na_{n+1}\text{ 为奇数时。}\end{cases}$ 试证：对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq 0$。

9. 如果 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\pi$，$x_i\in[0,\pi]$，$i=1,2,\cdots,n$，求证：$\sum\limits_{i=1}^{n}\sin x_i\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}$。

10. (2004 年澳大利亚奥林匹克试题)非负整数数列 $\{x_n\}$ 定义为：x_1 是少于 204 的非负整数，且 $x_{n+1}=\left(\frac{n}{2004}+\frac{1}{n}\right)x_n^2-\frac{n^3}{2004}+1$，$n>0$。证明：数列 $\{x_n\}$ 一定包含无数个质数。

第6讲　逐步调整

方法点津

数学解题过程中，我们常常要从与问题实质有联系的较宽条件或较低要求开始，然后利用此时获得的结果作为新的行动基地，逐步加强要求，加深层次，逼近原问题，从而使原问题获得彻底解决，这种方法叫做逐步调整法．逐步调整处理问题有合理分散，逐层突破难点的效果，因此，它在解决某些复杂的竞赛题中总是能“屡建奇功”．

逐步调整法能够解决的主要是涉及到多个变量的问题，由于多个变量存在的这个系统是一个初始状态和一个最终状态的问题．应用该法解决竞赛题应注意三个基本点：

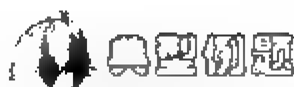
一是系统存在的状态是有限的；

二是调整的目标是最终状态，而且最终状态是存在的，如求最值，最值的存在是前提；

三是调整的过程是针对局部进行调整，从而达到整体目标．

逐步调整是局部化策略的体现，正如波利亚所说“局部提示整体”、“局部恢复整体”．与逐步调整相类似的还有(1)冻结变量，即先将一部分变量暂时视为常量，而让一个或两个变量进行变化，集中精力解决此局部问题，然后在此基础上再对其他变量逐步解冻或一次性解冻的策略；(2)磨光变换，即将原来“不光滑”的若干个变量磨成“光滑”的一种解题策略．那么，什么是“不光滑”呢？如对于一元变量 x，y，z，它们的值一开始是任意的，可以看作是凹凸不平的，不光滑的，而当 x，y，z 取等值时又可视为是光滑的．因此，从某种程序上讲，解题过程就是将变量 x，y，z 的不光滑状态变为光滑平整的状态．





例1 已知正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，满足 $x_1x_2\cdots x_n = 1$，求证：

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant 1$$

证明 从特殊情形入手，然后研究一般情况，通过逐部调整解决问题.

当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时不等式成立.

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中不全为1时，其中必有一个属于(0, 1)，一个属于$(1, +\infty)$，据对称性，不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_n, x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n$.

(1) 若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1}$，

则 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}$

$<\underbrace{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n-1}}_{n-1\text{个}}=\frac{n-2}{n-1}$，

故 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}<1$.

(2) 若 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}>\frac{1}{n-1}$，即 $x_1x_n<(n-1)^2$.

作第一次调整，令 $x_1'=1, x_n'=x_1x_n, x_j'=x_j (2\leqslant j\leqslant n-1)$，下证

$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}$

$\leqslant\frac{1}{n-1+x_1'}+\frac{1}{n-1+x_2'}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}$，

即证 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\frac{1}{n-1+1}+\frac{1}{n-1+x_1x_n}$. ……①

令 $f(x)=\frac{1}{n-1+x}$，

则 $f(y)+f(z)=\frac{1}{n-1+y}+\frac{1}{n-1+z}=\frac{2(n-1)+y+z}{(n-1)^2+yz+(n-1)(y+z)}$.

记 $b=(n-1)^2+x_1x_n=(n-1)^2+x_1'x_n'$，$m=(n-1)(x_1+x_n)$，$m'=(n-1)(x_1'+x_n')=(n-1)(1+x_1x_n)$，$a=2(n-1)$，$c=\frac{1}{n-1}$，



① 的左边 $=f(x_1)+f(x_n)=\frac{a+cm}{b+m}$，右边 $=f(x_1')+f(x_n')=\frac{a+cm'}{b+m'}$，

由 $m'-m=(n-1)(1+x_1x_n-x_1-x_n)=(n-1)(x_1-1)(x_n-1)<0$，

因此 $m'<m$.

$①\Leftrightarrow \frac{a+cm}{b+m}\leqslant\frac{a+cm'}{b+m'}\Leftrightarrow(a-bc)(m-m')\geqslant0\Leftrightarrow a\geqslant bc$

$\Leftrightarrow 2(n-1)\geqslant\frac{1}{n-1}[(n-1)^2+x_1x_n]$

$\Leftrightarrow x_1x_n\leqslant(n-1)^2$. 由 $x_1x_n<(n-1)^2$，得 $x_1x_n\leqslant(n-1)^2$ 成立.

所以 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}$

$\leqslant\frac{1}{n-1+x_1'}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}$

$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n'}$，其中 $x_2x_3\cdots x_n'=1$.

再继续调整，可得 $\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+x_n}\leqslant\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n个}=1$.

评注 本题调整的目的是逐步将原不等式左边各项变为 $\frac{1}{n}$，值得注意每次调整应使各变量的积为1，而且更接近目标.

例2 (2006年全国高中数学联赛试题)将2006表示成5个正整数 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 之和. 记 $S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant5}x_ix_j$. 问：

(1) 当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时，S 取到最大值；

(2) 进一步地，对任意 $1\leqslant i,j\leqslant5$，有 $|x_i-x_j|\leqslant2$，问当 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 取何值时，S 取到最小值.

解 (1) 首先，这样的 S 的值是有界集，故必存在最大值与最小值.

若 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$，且使 $S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant5}x_ix_j$ 取到最大值，则必有

$$|x_i-x_j|\leqslant1\ (1\leqslant i,j\leqslant5). \quad ①$$

事实上，假设式①不成立，不妨设 $x_1-x_2\geqslant2$. 令 $x_1'=x_1-1,x_2'=x_2+1,x_i'=x_i\ (i=3,4,5)$，有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$，$x_1'x_2'=x_1x_2+x_1-x_2-1>x_1x_2$.

将 S 改写成 $S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant5}x_ix_j=x_1x_2+(x_1+x_2)(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

同时有 $S'=x_1'x_2'+(x_1'+x_2')(x_3+x_4+x_5)+x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5$.

于是，有 $S'-S=x_1'x_2'-x_1x_2>0$，这与 S 在 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 时取到最大值矛盾



所以，必有 $|x_i-x_j|\leqslant 1(1\leqslant i,j\leqslant 5)$. 因此，当 $x_1=402, x_2=x_3=x_4=x_5=401$ 时，取到最大值.

(2) 当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2006$ 且 $|x_i-x_j|\leqslant 2$ 时，只有如下三种情形满足要求：① 402，402，402，400，400；② 402，402，401，401，400；③ 402，401，401，401，401.

而后两种情形是在第一种情形下作 $x_i'=x_i-1, x_j'=x_j+1$ 调整下得到的. 根据(1)的解题过程可知，每调整一次，和式 $S=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 5}x_ix_j$ 变大，所以在 $x_1=x_2=x_3=402, x_4=x_5=400$ 时，取到最小值.

评注 解决本题的关键是把五元函数 S 视为二元函数，通过调整两个变量的取值，使 S 的值最大，最终获得问题的解决.

例3 设 $x_i>1(i\in \mathbf{N}^*)$，记 $A=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$. 证明：$\prod\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)\geqslant\left(\frac{A+1}{A-1}\right)^n$.

证 记 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod\left(\frac{x_i+1}{x_i-1}\right)$.

设 $x_1=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_n=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

则 $x_n\leqslant A\leqslant x_1$.

下面证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant f(x_1x_nA^{-1},x_2,\cdots,x_{n-1},A)$. ①

即只须证

$$\left(\frac{x_1+1}{x_1-1}\right)\left(\frac{x_n+1}{x_n-1}\right)\geqslant\frac{A+1}{A-1}\left(\frac{x_1x_nA^{-1}+1}{x_1x_nA^{-1}-1}\right). \quad ②$$

再利用式②至多作 $n-1$ 次调整，立得原不等式成立.

例4 设整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 满足

$1<x_1<x_2<\cdots<x_n<y_1<y_2<\cdots<y_m$，

$x_1+x_2+\cdots+x_n>y_1+y_2+\cdots+y_m$.

证明：$x_1x_2\cdots x_n>y_1y_2\cdots y_m$.

证法一 不妨设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=y_1+y_2+\cdots+y_m$.

则 $n>m\geqslant 1$.

我们的想法是，通过调整 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使其积逐步减小，而 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 不变. 若调整后的 $x_1',x_2',\cdots,x_n'$ 的积仍大于 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的积，则原题得证.

记 $f(n,m)=x_1x_2\cdots x_n-y_1y_2\cdots y_m(n>m\geqslant 1)$. 对 $n+m$ 作归纳.

分三种情形讨论.

(1) $x_{n-1}+x_n\leqslant y_1$，令 $x_{n-1}'=x_{n-1}+x_n$.

则 $1<x_1<\cdots<x_{n-1}'<y_1<\cdots<y_m$，

且 $x_{n-1}x_n>x_{n-1}+x_n=x_{n-1}'$.



故 $f(n, m) > x_2 \cdots x_{n-1} x'_n - y_1 \cdots y_m = f(n-1, m) > 0$.

(2) $x_1 + x_n = y_1 + 1 (n \geqslant 3)$. 记 $x_1 = 1 + a (a \geqslant 1)$,

令 $x'_n = x_n + a = y_1, x'_{n-1} = x_{n-1} - 1$.

则 $x_1 x_{n-1} x_n > x'_{n-1} x'_n$

故 $f(n, m) > y_1 f(n-2, m-1) > 0$.

(3) $x_1 + x_n \geqslant y_1 + 2 (n \geqslant 3)$

记 $y_1 = x_n + a (a \geqslant 1)$, 令 $x'_n = a + x_n = y_1, x'_1 = x_1 - a$,

且 $2 \leqslant x'_1 \leqslant x_1$.

则 $x_1 x_n > x'_1 x'_n$

故 $f(n, m) > y_1 f(n-1, m-1) > 0$.

综上，知 $f(n, m) > 0$ 对 $n+m$ 成立

证法二 也可由 $\sqrt[k]{k} > \sqrt[k+1]{k+1} (k \geqslant 3)$ 给出原不等式的一个简证.

因为 $n > m$, $2 \leqslant x_1 < \cdots < x_n$, $4 \leqslant y_1 < \cdots < y_m$.

所以, $x_1^{\frac{1}{x_1}} \geqslant y_1^{\frac{1}{y_1}} \geqslant \cdots \geqslant y_m^{\frac{1}{y_m}}$

故 $x_1 \geqslant y_1^{\frac{x_1}{y_1}}, \cdots, y_m$.

从而, $x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant y_1^{\frac{x_1}{y_1}} \cdots > y_1 y_2 \cdots y_m$.

评注 第一个证明思路自然，而后一个证明则需要较强的洞察能力．两个证明均需要扎实的代数基本功

例 5 (2003 年中国国家集训队训练题)设 $x, y, z \geqslant 0$, $xy + yz + zx = 1$. 证明:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{5}{2}$$

证明 不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$, 记 $u = \frac{x+y}{2} \geqslant z$. 由题设条件有 $u^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

当 $u \geqslant 1$ 时, $f \geqslant \frac{1}{x+y} + x + y = 2u + \frac{1}{2u} \geqslant \frac{5}{2}$;

当 $u < 1$ 时, 因为 $z = \frac{1 - xy}{x+y} \geqslant \frac{1 - u^2}{2u} = z' > 0$.

于是, 只须证明 $f(x, y, z) \geqslant f(u, u, z') \geqslant \frac{5}{2}$ 即可

评注 也可作如下调整: 对 $x \geqslant y \geqslant z$, 记 $x' = \frac{1}{y+z}$, 可以证明 $f(x, y, z) \geqslant f(x', y+z, 0) \geqslant \frac{5}{2}$

例 6 (2005 年全国高中数学联赛试题)在 $\triangle ABC$ 中, 求证:



$f=\sum\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}\geq\frac{1}{2}$.

证法一 利用调整法，给出一个纯三角证法。

原不等式可化为

$$g(A,B,C)=\sum\left(\cos A+\frac{1}{1+\cos A}\right)\geq\frac{7}{2}. \quad ①$$

不妨设$\angle A\geq\angle B\geq\angle C$.

首先证明 $g(A,B,C)\geq g\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2},C\right)$. ②

注意到

$$\left(\cos A+\frac{1}{1+\cos A}\right)+\left(\cos B+\frac{1}{1+\cos B}\right)$$

$$=(\cos A+\cos B)+\frac{2+\cos A+\cos B}{4\cos^2\frac{A}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}}$$

$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+\frac{2\left(1+\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)^2}. \quad ③$$

令 $m=\cos\frac{A+B}{2}$，$n=\cos\frac{A-B}{2}$，则 $0<n\leq 1$，$0<m\leq\frac{1}{2}$

(因$\frac{2\pi}{3}\leq\angle A+\angle B<\pi$)

故 $g(A,B,C)\geq g\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2},C\right)$

$$\Leftrightarrow h(n)=mn+\frac{1+mn}{(m+n)^2}\geq h(1) \quad ④$$

$$\Leftrightarrow mn+\frac{1+mn}{(m+n)^2}\geq m+\frac{1+m}{(1+m)^2}$$

$$\Leftrightarrow m(n-1)+\frac{(m+1)(1+mn)-(m+n)^2}{(m+1)(m+n)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\left[m+\frac{m^2-m-n-1}{(m+1)(m+n)^2}\right]\leq 0. \quad ⑤$$

而 $(m^2+m)(m+n)^2+m^2-m-n-1$

$=m^4+2m^3n+m^2n^2+m^3+2m^2n+mn^2+m^2-m-n-1$

$\leq\frac{1}{16}+\frac{1}{4}n+\frac{1}{4}n+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}+m(n^2-1)-1-n$



$$=m(n^2-1)-\frac{9}{16}<0.$$

故式③成立，从而，式②得证.

其次证明 $g\left(\frac{A+B}{2},\frac{A+B}{2},C\right)\geqslant\frac{7}{2}$. ⑥

记 $\theta=\frac{A+B}{2}$，$\angle C=\pi-2\theta$，令 $\cos\theta=u$，则 $\cos C=-\cos2\theta=1-2u^2$，

$$g(\theta,\theta,\pi-2\theta)=2\left(u+\frac{1}{1+u}\right)+(1-2u^2)+\frac{1}{2(1-u^2)}\geqslant\frac{7}{2}$$

$\Leftrightarrow 4(1-u^2)\left(u+\frac{1}{1+u}\right)+2(1-2u^2)(1-u^2)+1\geqslant7(1-u^2)$

$\Leftrightarrow 4u^4-4u^3+u^2\geqslant0$

$\Leftrightarrow u^2(2u-1)^2\geqslant0$. 此为显然，故得证.

评注 本题还有以下两种巧妙解答，均由华师大二附中唐立华老师提供.

证法二 设 a，b，c 为△ABC的三边长，对边作内切圆代换

$a=x_2+x_3$，$b=x_3+x_1$，$c=x_1+x_2(x_1,x_2,x_3>0)$

不妨设 $x_1+x_2+x_3=1$.

由余弦定理可得

$$f=\sum\frac{(x_1-x_2x_3)^2}{2x_1(1-x_2)(1-x_3)}\geqslant\frac{1}{2} \quad ①$$

$\Leftrightarrow\sum x_2^2x_3^2-7(x_1x_2x_3)^2\geqslant x_1x_2x_3\sum(x_2x_3+x_2^2x_3^2)$

$\Leftrightarrow\sum(x_2^2x_3^3+x_2^3x_3^2)-2(x_1x_2x_3)\sum x_1\geqslant2\sum x_1x_2^2x_3^2+x_1x_2x_3\sum(x_2^2x_3+x_2x_3^2)$

$\Leftrightarrow\sum x_2^2x_3^2(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_2+x_3)\geqslant0.$ ②

由对称性，不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant0$，易知式②的第一项非负，后两项之和为

$x_3^2x_1^2(x_3-x_2)(x_1-x_2)(x_3+x_1)+x_1^2x_2^2(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_2)$

$=x_1^2(x_2-x_3)[x_2^2(x_1-x_3)(x_1+x_2)-x_3^2(x_1-x_2)(x_1+x_3)]\geqslant0.$

故原不等式成立.

证法三 对式①应用柯西不等式有

$$f\geqslant\frac{\left[\sum(x_1-x_2x_3)\right]^2}{2\sum x_1(1-x_2)(1-x_3)}.$$

于是，只须证

$$\left[\sum(x_1-x_2x_3)\right]^2\geqslant\sum x_1(1-x_2)(1-x_3)$$

$\Leftrightarrow\sum x_2^2x_3^2\geqslant x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)\Leftrightarrow\sum x_3^2(x_1-x_2)^2\geqslant0.$



故原不等式成立

证法四 作万能代换

令 $\tan\frac{A}{2}=x,\tan\frac{B}{2}=y,\tan\frac{C}{2}=z$，其中 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$.

则 $f\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sum\left(x^2+\frac{4}{x^2+1}\right)\geqslant 10.$ ①

由 $xy+yz+zx=1$，为去掉这一限制，再设 $x=\frac{u}{\sqrt{uv+vw+wu}}$ 等，其中 $u,v,w>0$.

则式①$\Leftrightarrow\frac{\sum u^2}{\sum uv}-1\geqslant 9-\frac{8\sum u\sum uv}{\prod(u+v)}$

$\Leftrightarrow\frac{\sum u^2-\sum uv}{\sum uv}\geqslant\frac{\sum(u+v)uv-6uvw}{\prod(u+v)}.$

$\prod(u+v)\sum(u-v)^2$

$\geqslant 2\sum uv\left[\sum uv(u+v)-6uvw\right]$

$=2\sum uv\sum(u-v)^2w$

$\Leftrightarrow\sum(u-v)^2(u^2v+uv^2+u^2w+v^2w-uw^2-vw^2)\geqslant 0.$ ②

记上面三个式子分别为 f_1,f_2,f_3.

不妨设 $u\geqslant v\geqslant w$，则

$f_1=(u-v)^2[(v^2-w^2)u+(u^2-w^2)v+u^2w+v^2w]\geqslant 0,$

$f_2=(v-w)^2[uv(v-u)+(v^2-u^2)w-w^2u+w^2v]$

$\quad\geqslant-(v-w)^2(u-v)(uv+vw+wu),$

$f_3=(u-w)^2[w(u^2-v^2)+uv(u-v)+w^2u+w^2v]$

$\quad\geqslant(u-w)^2(u-v)(uv+vw+wu)$

$\quad\geqslant(v-w)^2(u-v)(uv+vw+wu).$

所以，$f_1+f_2+f_3\geqslant 0.$

从而，式②得证．故原不等式成立.

证法五 注意到 $f\geqslant\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{bc(b+c-a)}\geqslant a+b+c.$

利用 Cauchy 不等式，只须证

$(\sum a^2)^2$ [illegible] $\sum a\sum bc(b+c-a)$

$\Leftrightarrow 2\sum a^4+2abc\sum a\geqslant 2\sum bc(b^2+c^2)$



$$\Leftrightarrow\sum(b^4+c^4-b^3c-bc^3)\geqslant\sum[b^3c+bc^3-abc(b+c)]$$

$$\Leftrightarrow\sum(b-c)^2[b^2+bc+c^2-a(b+c)]\geqslant 0.$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，易知 $(a-b)^2[a^2+ab+b^2-c(a+b)]\geqslant 0$，且后两项之和也大于或等于0 故原不等式成立.

证法六 $(\sum a^2)^2\geqslant\sum a\sum bc(b+c-a)$

$$\Leftrightarrow(\sum a^2)^2\geqslant 4\sum(bc)^2\cos^2\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum a^4\geqslant 2\sum(bc)^2\cos A,$$

为嵌入不等式，即证.

例7 设 $x,y,z>0$，试证：$\sum\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}\geqslant\frac{3}{5}$.

证法一 $\sum\frac{(x+y-z)^2}{(x+y)^2+z^2}\geqslant\frac{3}{5}\Leftrightarrow f(x,y,z)=\sum\frac{(x+y)z}{(x+y)^2+z^2}\leqslant\frac{6}{5}.$ ①

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$，$x+y+z=1$ 求证

$$f(x,y,z)\leqslant f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1-x)x}{(1-x)^2+x^2}+\frac{(1-y)y}{(1-y)^2+y^2}\leqslant\frac{2(1-u)u}{(1-u)^2+u^2}\left(u=\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow(y-x)\left[\frac{3x+y-2}{(1-x)^2+x^2}-\frac{3y+x-2}{(1-y)^2+y^2}\right]\leqslant 0.\quad②$$

要证式②只须证

$$(y-x)^2[3(1-z)^2-6(1-z)+2]\leqslant 0.\quad③$$

因为 $x+y=1-z\geqslant\frac{2}{3}$，所以，式③成立.

而 $f\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2},z\right)\leqslant\frac{6}{5}\Leftrightarrow(3z-1)^2(3z^2-z+1)\geqslant 0$

故原不等式成立

证法二 注意到

$$\frac{(x+y)z}{(x+y)^2+z^2}=\frac{(x+y)z}{\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)^2+z^2}$$

$$\leqslant\frac{4z}{3(x+y)+4z}=\frac{4z}{3+z}.$$

所以，只须证 $f(x,y,z)\leqslant\frac{6}{5}$，即只须证



$$\sum \frac{4x}{3-x} \leqslant \frac{6}{5} \Leftrightarrow \sum \frac{1}{x+3} \geqslant \frac{9}{10}$$

由柯西不等式即证

评注 后一个证明与前一个证明比较，前者像竭泽捞鱼，后者似垂竿悬钓，两者均能得到鱼，但后者不仅需要扎实的基本功，更要有灵巧的头脑

例8 （第40届IMO国家队选拔试题）对于满足条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ 的非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，求 $\sum_{i=1}^{n} (x_i^4 - x_i^5)$ 的最大值.

证明 (1) 对 $x, y > 0$，

$(x+y)^4-(x+y)^5+0^4-0^5-(x^4-x^5+y^4-y^5)$

$=xy(4x^2+6xy+4y^2)-xy(5x^3+10x^2y+10xy^2+5y^3)$

$=\frac{1}{2}xy(7x^2+12xy+7y^2+x^2+y^2)-5xy(x^3+2xy^2+2x^2y+y^3)$

$\geqslant \frac{7}{2}xy(x^2+2xy+y^2)-5xy(x^3+2xy^2+2x^2y+y^3)>\frac{1}{2}xy(x+y)^2[7-10(x+y)]$.

因此，当 $x>0, y>0, 7-10(x+y)>0$ 时，上式必大于 0.

(2) 若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的非 0 数少于两个，则题中的和式为 0

下面考察 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的非 0 数不少于两个的情形.

若某三个数 $x_i, x_j, x_k > 0$，则其中必有两数的和小于或等于 $\frac{2}{3} < \frac{7}{10}$（否则 $x_i + x_j + x_k > 1$，与 $x_i + x_j + x_k \leqslant 1$ 矛盾）.

由(1)知，可将这两个数合并为一个数，再补一个数 0，使得题中和式的值变大. 经过有限次调整，最后剩下两个非 0 数. 不妨设为 $x, y > 0, x + y = 1$. 对此情形，有

$x^4-x^5+y^4-y^5=x^4(1-x)+y^4(1-y)$

$=x^4y+xy^4=xy(x^3+y^3)=xy(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$=xy[(x+y)^2-3xy]$

$=\frac{1}{3}\times 3xy(1-3xy)\leqslant \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$.

当 $3xy=1-3xy$，即 $xy=\frac{1}{6}$ 时，$(x^4-x^5+y^4-y^5)_{\max}=\frac{1}{12}$.

此即题中所求的最大值. 能达到此最大值的诸 x_i 中只有两个不是 0，用 x, y 表示这两个数，则有 $x, y>0, x+y=1, xy=\frac{1}{6}$.

解得 $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, y=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ 或 $x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}, y=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.



所以，当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中仅有这样的两个非0数时，$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^4-x_i^5)\right]_{\max}=\frac{1}{12}$

例9 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 个正整数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=m$，$m(m\geqslant n)$ 为常数．求 $M=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}a_ia_ja_k$ 的最大值．

解 首先证明，当 M 取得最大值 M_1 时，对任意 $i,j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 有

$$|a_i-a_j|\leqslant 1$$

事实上，若 M 取得最大值 M_1 时，存在某个 i_0,j_0 使得 $|a_{i_0}-a_{j_0}|\geqslant 2$．

不失一般性，可设 $a_1-a_2\geqslant 2$，把和式中的 a_1 及 a_2 分离出来，便有

$$M_1=a_1a_2\sum_{k=3}^{n}a_k+(a_1+a_2)\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}a_ja_k+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant n}a_ia_ja_k.$$

令 $b_1=a_1-1$，$b_2=a_2+1$，$b_i=a_i(i\geqslant 3)$，则 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 仍是正整数，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=m$．

记 $M_2=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}b_ib_jb_k=b_1b_2\sum_{k=3}^{n}b_k+(b_1+b_2)\sum_{3\leqslant j<k\leqslant n}b_jb_k+\sum_{3\leqslant i<j<k\leqslant n}b_ib_jb_k$．

因为 $b_1+b_2=a_1+a_2$，$b_i=a_i(i\geqslant 3)$，故

$$M_2-M_1=(b_1b_2-a_1a_2)\sum_{k=3}^{n}a_k.$$

又 $b_1b_2-a_1a_2=a_1-a_2-1\geqslant 1$，从而 $M_2>M_1$，与 M_1 是最大值矛盾．

由于满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=m$ 的正整数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 只有有限种，故 M 的最大值一定存在．设 $m=qn+r$，这里 q,r 是整数，且 $0\leqslant r<n$．

则当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 r 个取值 $q+1$，其余 $n-r$ 个取值 q 时，满足上述 M 取最大值的必要条件 $|a_i-a_j|\leqslant 1$（对任意的 i,j）．

又易看出满足这个条件的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 只有上述取法．所以，在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的上述取法下，M 取得最大值．且

$$M_{\max}=C_r^3(q+1)^3+C_r^2(q+1)^2C_{n-r}^1q+C_r^1(q+1)C_{n-r}^2q^2+C_{n-r}^3q^3.$$

这里约定当 $k>n$ 时，$C_n^k=0$．

评注 本解法是先对自变量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 作调整，找出因变量取最值的必要条件，再通过说明最值的存在，求得最值．

例10 （1991年国家集训测试题）设 x_1,x_2,x_3,x_4 都是正实数且 $x_1+x_2+x_3+x_4=\pi$，求表达式 $\left(2\sin^2x_1+\frac{1}{\sin^2x_1}\right)\left(2\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_2}\right)\left(2\sin^2x_3+\frac{1}{\sin^2x_3}\right)\left(2\sin^2x_4+\frac{1}{\sin^2x_4}\right)$ 的最小值．



解 设 x_1+x_2 为常数，由 $\sin x_1\cdot\sin x_2=\frac{1}{2}[\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)]$ 知 $\sin x_1\cdot\sin x_2$ 的值随 $|x_1-x_2|$ 的变小而增大，记所讨论的表达式为 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$.

若 x_1,x_2,x_3,x_4 不全相等，不妨设 $x_1>\frac{\pi}{4}>x_2$，令 $x_1'=\frac{\pi}{4}$，$x_2'=x_1+x_2-\frac{\pi}{4}$，$x_3'=x_3$，$x_4'=x_4$，于是有 $x_1'+x_2'=x_1+x_2$，$|x_1'-x_2'|<|x_1-x_2|$. 又由

$$\left(2\sin^2x_1+\frac{1}{\sin^2x_1}\right)\left(2\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_2}\right)$$
$$=\left(4\sin^2x_1\cdot\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_1\cdot\sin^2x_2}\right)+2\left(\frac{\sin^2x_1}{\sin^2x_2}+\frac{\sin^2x_2}{\sin^2x_1}\right)$$

及 $x_2<\frac{\pi}{4}$，则 $\sin x_2<\frac{\sqrt{2}}{2}$，$2\sin^2x_1\cdot\sin^2x_2<1$.

又因在区间 $[0,1]$ 上，函数 $g(t)=t+\frac{1}{t}$ 严格递减，故有

$$\left(2\sin^2x_1+\frac{1}{\sin^2x_1}\right)\left(2\sin^2x_2+\frac{1}{\sin^2x_2}\right)$$
$$>2\left(2\sin^2x_1'\cdot\sin^2x_2'+\frac{1}{2\sin^2x_1'\cdot\sin^2x_2'}\right)+2\left(\frac{\sin^2x_1'}{\sin^2x_2'}+\frac{\sin^2x_2'}{\sin^2x_1'}\right)$$
$$=\left(2\sin^2x_1'+\frac{1}{\sin^2x_1'}\right)\left(2\sin^2x_2'+\frac{1}{\sin^2x_2'}\right),$$

从而有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)>f(x_1',x_2',x_3',x_4')$.

如果 x_2',x_3',x_4' 不全相等，则又可仿上调整而证得：当 x_1,x_2,x_3,x_4 不全相等时，总有 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)>f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

可见，所求的最小值为 $f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)=81$，当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{\pi}{4}$ 时取得.

评注 对于问题涉及的多个可变对象，先对其中少数对象进行调整，让其他变量暂时保持不变，从而化难为易，使问题的解决在局部获得进展. 经过若干次这样局部上的调整，不断缩小范围，最终导致整个问题的圆满解决. 这无疑是我们研究数学乃至其他问题的应用十分广泛而又卓有成效的一种基本思想方法. 当然，用逐步调整法解题一般书写篇幅较大，但解题思路简明，流畅，极富"操作性"，因此，它不失为一种优秀的解题方法.



习题精选 5

1. 求证：对于 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有 $A(a) \geqslant G(a)$，其中 $A(a)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，$G(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$．

2. 设 $n\geqslant 2$，求乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 在条件 (1) $x_i\geqslant\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，(2) $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值与最小值．

3. 已知非负实数 a, b, c 满足 $ab+bc+ca=1$，求证：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{5}{2}$．

4. 已知二次三项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的所有系数都是正的且 $a+b+c=1$，求证：对于任何满足 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 的正数组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有 $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant 1$．

5. （第 40 届 IMO 试题）n 为给定整数，$n\geqslant 2$，确定最小的常数 c，使不等式 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j(x_i^2+x_j^2)\leqslant c\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^4$ 对所有非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都成立．

6. （1995 年全国高中数学联赛试题）求所有实数 p，使得三次方程 $5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p$ 的三个根均为自然数．

7. 已知 a, b, c 是正实数，且 $a+b+c=1$，求证：$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geqslant 2$．

8. （2003 年新加坡奥林匹克试题）若 $x, y, z\in\mathbf{R}^+$，求证 $\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)}\leqslant\frac{1}{5120}$．

9. 已知 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ 满足 $y_2\geqslant y_1\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$，$x_1+x_2+x_3+x_4\geqslant y_1+y_2$，证明：$x_1x_2x_3x_4\geqslant y_1y_2$．

10. （第 12 届 IMO 试题）设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{1997}$ 满足如下条件：

(1) $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}$，其中 $i=1, 2, \cdots, 1997$；

(2) $x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$．

求 $x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$ 的最大值．



第 讲　分拆合项

方法点津

有人说，洋洋百万言的《三国演义》其精髓就是开篇第一句话"天下大势，合久必分，分久必合"。事实上，数学解题中，巧妙地运用"分"（分拆）与"合"（合项）的策略也会有意想不到的效果。在本书第1讲中我们已经领略了常数分拆的魅力，在本讲我们将进一步了解更多、更一般的分拆与合项技巧。

一般来说，分拆包括一分为二、一分为多两种形式，合项也包括合二为一、合多为一两种形式。

了解以下常见的分拆例子对解决许多综合性问题大有裨益。

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$；

(2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$；

(3) $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$；

(4) $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1$（其中 $a_k\neq 0, k\in\mathbf{N}^*$）；

(5) $n\cdot n!=(n+1)!-n!$；

(6) $C_n^m=C_{n+1}^{m+1}-C_n^{m+1}$；

(7) $n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$；

(8) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$；

(9) $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$，其中 $|x|<1$。



典型例题

例1 （2007年全国数学联赛试题）设 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数 $n\geq 2$ 时，$a_{n+1}<a_n$。

证明 由于 $\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)$，因此 $a_n=\frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。

于是，对任意的正整数 $n\geq 2$，有

$$\frac{1}{2}(a_n-a_{n+1})=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1\right)>0,$$

即 $a_{n+1}<a_n$。

例2 （2007高考浙江卷理科第21题改编）已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}，a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(2^k+3k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根，且 $a_{2k-1}\leq a_{2k}(k=1,2,3,\cdots)$，记 $f(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{|\sin n|}{\sin n}+3\right)$，$T_n=\frac{(-1)^{f(2)}}{a_1a_2}+\frac{(-1)^{f(3)}}{a_3a_4}+\frac{(-1)^{f(4)}}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$，求证：$\frac{1}{6}\leq T_n\leq\frac{5}{24}(n\in \mathbf{N}^*)$。

证明 方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot 2^k=0$ 的两个根为 $x_1=3k$，$x_2=2^k$，易求得 $a_1=2,a_2=3,a_3=4,a_4=6,a_5=9,a_6=8,a_7=12,a_8=16$，当 $k\geq 4$ 时，不难证明 $2^k>3k$，又因为 $a_{2k-1}\leq a_{2k}(k=1,2,3,\cdots)$，所以 $a_{2k-1}=3k$，$a_{2k}=2^k$。

由 $T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$，得 $T_1=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{6}$，

$$T_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{5}{24}.$$

当 $n\geq 3$ 时，$T_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}-\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$

$$\geq\frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\left(\frac{1}{a_5a_6}+\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$\geq\frac{1}{6}+\frac{1}{6\cdot 2^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\cdot 2^n}>\frac{1}{6},$$

同时，$T_n=\frac{5}{24}-\frac{1}{a_5a_6}+\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$



$\leqslant \frac{5}{24}-\frac{1}{a_5a_6}+\left(\frac{1}{a_7a_8}+\frac{1}{a_9a_{10}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$

$\leqslant \frac{5}{24}-\frac{1}{9\cdot 2^3}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=\frac{5}{24}-\frac{1}{9\cdot 2^n}<\frac{5}{24}$.

综上，当 $n\in \mathbf{N}^*$ 时，$\frac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant \frac{5}{24}$

例 3 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^n-(-2)^n$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{1}{2}$.

证明 本题若直接对通项进行放缩则很难达到目标.如果采取"合二为一"的技巧，再进行放缩则能出奇制胜.用分析法易证明，当 k 为正奇数时，有 $\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{4}{3^{k+1}}$

(1) 当 n 为偶数时，有

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right)<\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^4}+\frac{4}{3^6}+\cdots+\frac{4}{3^n}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}$.

(2) 当 n 为奇数时，有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^4}+\frac{4}{3^6}+\cdots+\frac{4}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)<\frac{1}{2}$

例 4 求证：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}>1+\frac{n}{2}\ (n\geqslant 2,n\in \mathbf{N})$.

证明 先将原数列各项分别"组合"，得

左边 $=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n个}=1+\frac{n}{2}$

例 5 求证：$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}<\frac{1}{2}$



证明 先将左边分式的分母运用"合"的策略.

得 $(n-2)!+(n-1)!+n!=[1+n-1+n(n-1)](n-2)!=n^2(n-2)!$

代入原式后，再对每一项进行"分"解，得

$$\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{n}{n^2(n-2)!}=\frac{1}{n(n-2)!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$$

故 $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{2}$.

例6 （第12届IMO试题改编）设数列$\{a_n\}$满足$1=a_0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$，数列$\{b_n\}$由下式定义：$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}$，$n=1,2,\cdots$，求证 $0\leqslant b_n\leqslant 2$

证明 对已知式直接进行分拆.

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{1}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k}\right)=\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)<2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

因此，$b_n<2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<\frac{2}{\sqrt{a_0}}=2$

而 $b_n\geqslant 0$ 为显然，故 $0\leqslant b_n<2$.

例7 对于 $n\in\mathbf{N}^*$，设 $T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$，求证：$T_n\leqslant\frac{11}{10}$.

证法一 当 $n\geqslant 2$ 时，

由 $\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n^4-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n^2+1}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-1}-\frac{1}{n^2+n}\right)$

$$<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

得 $T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$



$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}<1+\frac{1}{12}+\frac{1}{81}<\frac{11}{10}$

证法二 当 $n\geqslant 4$ 时，

由 $\frac{1}{n^4}<\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$

得 $T_n<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\times3\times4}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right)$

$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{72}<\frac{11}{10}$

证法三 $T_n<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{4}{4^4}+\frac{8}{8^4}+\frac{16}{16^4}+\cdots=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{16^3}+\cdots$

$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{8}}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{56}=1+\frac{841}{9072}<\frac{11}{10}$.

证法四 当 $n\geqslant 5$ 时，$\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n\cdot 5^3}<\frac{1}{25}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，则

$T_n<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{25}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{25}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$

$=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{56}<\frac{11}{10}$

证法五 当 $n\geqslant 4$ 时，

$\frac{1}{n^4}=\frac{1}{n^2n^2}<\frac{1}{n^2(n-1)^2}=\frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$

$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{7}\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$

$=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right)<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{63}<\frac{11}{10}$.

证法六 当 $n\geqslant 3$ 时，

$\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n^4-n^2}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n^2-n}-\frac{1}{n^2+n}\right)$.

同时 $\frac{1}{(n-1)^2+(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n^2-n}$，

所以 $T_n<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^2-3}-\frac{1}{3^2+3}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4^2-4}-\frac{1}{4^2+4}\right)+\cdots+\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n^2-n}\right.$



$\left.\frac{1}{n^2+n}\right)$

$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{3^2-3}-\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{4^2-4}-\frac{1}{4^2+4}+\cdots+\frac{1}{n^2-n}-\frac{1}{n^2+n}\right]$

$=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3^2-3}-\frac{1}{n^2+n}\right)<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}=1+\frac{13}{144}<1+\frac{1}{10}=\frac{11}{10}$

评注 数学思维开拓性指的是对一个问题能从多方面考虑；对一个对象能从多种角度观察，对一个题目能想出多种不同的解法，即一题多解。在一题多解的训练中，我们要密切注意每种解法的特点，善于发现解题规律，从中发现最有意义的简捷解法。本题的六种不同解法主要区别在于放缩的角度与技巧不同，有些技巧十分巧妙，不是一朝一夕能够掌握的，它需要不断积累，细心品味，逐步提高。

例8 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_0=\frac{1}{2}$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}^2$，求证：$\frac{n+1}{n+2}<a_n<n$

解 易知 $a_n>a_{n-1}>0$，又 $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}^2<a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_na_{n-1}\Rightarrow\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{n^2}$

所以 $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)$

$<1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$

$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$

故 $a_n<n$.

又 $a_{n-1}<n-1$，因此 $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}^2<a_{n-1}+\frac{n-1}{n^2}a_{n-1}$，

整理得 $a_{n-1}>\frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$，故 $a_n>a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}\cdot\frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$

所以 $\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}>\frac{1}{n^2+n-1}>\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

分析得 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)$

$>\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$

又 $a_1=\frac{3}{4}$，故 $\frac{1}{a_n}<\frac{5}{6}+\frac{1}{n+1}<\frac{n+2}{n+1}$，结论成立

评注 以上解答用到分拆恒等式(1)、(3)。若将递推关系式改为 $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$ 则



可证 $\frac{1}{n}<a_n<1$

例 9 已知函数 $f(x)=\frac{1}{4^x+2}(x\in\mathbf{R})$，点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是函数 $f(x)$ 图像上的两个点，且线段 P_1P_2 的中点 P 的横坐标为 $\frac{1}{2}$

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f\left(\frac{n}{m}\right)(m\in\mathbf{N},n=1,2,\cdots,m)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项的和 S_m；

(2) 若 $m\in\mathbf{N}^*$ 时，不等式 $\frac{a^m}{S_m}<\frac{a^{m+1}}{S_{m+1}}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围

解 (1) 由题可知，$x_1+x_2=2\times\frac{1}{2}=1$，所以，

$$y_1+y_2=f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{4^{x_1}+2}+\frac{1}{4^{x_2}+2}=\frac{4^{x_1}+4^{x_2}+4}{(4^{x_1}+2)(4^{x_2}+2)}$$

$$=\frac{4^{x_1}+4^{x_2}+4}{4^{x_1+x_2}+2(4^{x_1}+4^{x_2})+4}=\frac{4^{x_1}+4^{x_2}+4}{2(4^{x_1}+4^{x_2}+4)}=\frac{1}{2}$$

点 P 的纵坐标 $y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{4}$ 是定值 因此，

对任意自然数 m，n，$f\left(\frac{n}{m}\right)+f\left(\frac{m-n}{m}\right)=\frac{1}{2}$ 恒成立.

由于 $S_m=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{m-2}{m}\right)+f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{m}{m}\right)$，故可考虑利用倒序相加的方法. 即由于：

$$S_m=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{m-2}{m}\right)+f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{m}{m}\right)$$

$$=f\left(\frac{m}{m}\right)+f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{m-2}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)$$

所以，$2S_m=\left[f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{m}\right)+f\left(\frac{m-2}{m}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)\right]+2f\left(\frac{m}{m}\right)=\frac{1}{2}(m-1)+2f(1)=\frac{1}{6}(3m-1)$，所以，$S_m=\frac{1}{12}(3m-1)$

(2) 由 $S_m=\frac{1}{12}(3m-1)$，得 $S_{m+1}=\frac{1}{12}(3m+2)$，

故 $\frac{a^m}{S_m}<\frac{a^{m+1}}{S_{m+1}}$ 等价于 $12a^m\left(\frac{1}{3m-1}-\frac{a}{3m+2}\right)<0$ ①

依题意，①式应对任意 $m\in\mathbf{N}$ 恒成立.

当 $a=0$ 时，①式显然不成立，因此 $a=0$ 不合题意.



当 $a<0$ 时，$\frac{1}{3m-1}-\frac{a}{3m+2}>0$，只需 $a^m<0$ 对任意 $m\in N$ 恒成立，而当 m 为偶数时，$a^m<0$ 不成立，因此，$a<0$ 不合题意.

当 $a>0$ 时，因为 $a^m>0(m\in N)$，所以，需且只需 $\frac{1}{3m-1}-\frac{a}{3m+2}<0$ 对任意 $m\in N$ 恒成立. 即：$a>\frac{3m+2}{3m-1}$ 对 $m\in N$ 恒成立.

记 $g(m)=\frac{3m+2}{3m-1}(m\in N^*)$.

因为 $g(m+1)-g(m)=\frac{3m+5}{3m+2}-\frac{3m+2}{3m-1}=\frac{-9}{(3m+2)(3m-1)}<0$,

所以 $g(m)(m\in N)$ 的最大值为 $g(1)=\frac{5}{2}$，故 $a>\frac{5}{2}$.

例 10 （2000 年江苏省数学竞赛试题）已知 x、y、z 是正实数，且满足 $x^4+y^4+z^4=1$，求证：$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}\geqslant\frac{9}{8}\sqrt[4]{3}$.

解 $x^8(1-x^8)^8=\frac{1}{8}\cdot 8x^8(1-x^8)(1-x^8)\cdots(1-x^8)$

$$\leqslant\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8x^8+(1-x^8)+\cdots+(1-x^8)}{9}\right)^9=\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^9,$$

即 $x(1-x^8)\leqslant\frac{8}{\sqrt[4]{3^9}}$.

因此 $\frac{x^3}{1-x^8}=\frac{x^4}{x(1-x^8)}\geqslant\frac{x^4\cdot\sqrt[4]{3^9}}{8}$.

同理有 $\frac{y^3}{1-y^8}=\frac{y^4}{y(1-y^8)}\geqslant\frac{y^4\cdot\sqrt[4]{3^9}}{8}$，$\frac{z^3}{1-z^8}=\frac{z^4}{z(1-z^8)}\geqslant\frac{z^4\cdot\sqrt[4]{3^9}}{8}$.

三式相加，得 $\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}\geqslant\frac{x^4+y^4+z^4}{8}\cdot\sqrt[4]{3^9}=\frac{9}{8}\sqrt[4]{3}$.

等号当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ 时取得.

例 11 已知无穷正数数列 $\{a_n\}$ 满足：

(1) 存在 $m\in R$，使得 $a_i\leqslant m(i=1,2,\cdots)$；

(2) 对任意正整数 i、$j(i\neq j)$，均有 $|a_i-a_j|\geqslant\frac{1}{i+j}$.

求证：$m\geqslant1$

证明 对 $n\geqslant4$，记 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，且满足



$$1 \leq a_{k_1} < a_{k_2} < \cdots < a_{k_n} \leq m$$

由条件(2)得 $a_{k_i} - a_{k_{i-1}} \geq \frac{1}{k_i + k_{i-1}}$ $(i=2,3,\cdots,n)$

于是，对任意的 $n\geq4$，都有

$m \geq a_{k_n} - a_{k_1}$

$= (a_{k_n} - a_{k_{n-1}}) + (a_{k_{n-1}} - a_{k_{n-2}}) + \cdots + (a_{k_2} - a_{k_1})$

$\geq \frac{1}{k_n + k_{n-1}} + \frac{1}{k_{n-1}+k_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{k_2 + k_1}$

由 Cauchy 不等式得

$\frac{1}{k_n+k_{n-1}} + \frac{1}{k_{n-1}+k_{n-2}} + \cdots + \frac{1}{k_2+k_1}$

$\geq \frac{(n-1)^2}{(k_n+k_{n-1}) + (k_{n-1}+k_{n-2}) + \cdots + (k_2+k_1)}$

$= \frac{(n-1)^2}{2(k_1+k_2+\cdots+k_n) - k_1 - k_n}$

$= \frac{(n-1)^2}{n(n+1) - (k_1+k_n)}$

$\geq \frac{(n-1)^2}{n^2+n-3} = 1 - \frac{3n-4}{n^2+n-3}$

从而，对任意的 $n\geq4$，都有 $m\geq1-\frac{3n-4}{n^2+n-3}$，

故一定有 $m\geq1$.

评注 为了利用条件(2)，将 $a_{k_n}-a_{k_1}$ 分拆为 $(a_{k_n}-a_{k_{n-1}})+(a_{k_{n-1}}-a_{k_{n-2}})+\cdots+(a_{k_2}-a_{k_1})$ 不失为一种高明的技巧。

例12 已知 $x,y,z\in(-1,1)$，且 $xyz=\frac{1}{36}$，试求函数 $u=\frac{1}{1-x^2}+\frac{4}{4-y^2}+\frac{9}{9-z^2}$ 的最小值.

解 由题意 $x^2, \frac{y^2}{4}, \frac{z^2}{9}\in(-1,1)$

故 $\frac{1}{1-x^2}+\frac{4}{4-y^2}+\frac{9}{9-z^2}$

$=(1+x^2+x^4+\cdots)+\left(1+\frac{y^2}{4}+\frac{y^4}{4^2}+\cdots\right)+\left(1+\frac{z^2}{9}+\frac{z^4}{9^2}+\cdots\right)$

$=3+\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)+\left(x^4+\frac{y^4}{4^2}+\frac{z^4}{9^2}\right)+\cdots$

$\geq 3+3\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{36}}+3\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x^2y^2z^2}{36}\right)^2}+\cdots$



$$3\left(1+\frac{1}{36}+\frac{1}{36^2}+\cdots\right)=3\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{36}}=\frac{108}{35}.$$

当且仅当 $x^2=\frac{y^2}{4}=\frac{z^2}{9}=\frac{1}{36}$ 时，u 取最小值 $\frac{108}{35}$.

评注 函数的幂级数展开是高等数学中的重要内容，其实在中学数学中也有特殊函数的幂级数展开，那就是无穷递缩等比数列的求和公式：$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$，$|x|<1$. 以上解答正是巧妙利用这一关系式而完成的.

例 13 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$，$a_{n+2}-a_{n+1}+a_n\sin^2\theta\cos^2\theta=0$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求证：$\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant a_n\leqslant 1-\sin^n 2\theta\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

解 由特征方程 $x^2-x+\sin^2\theta\cos^2\theta=0$ 解得两根为 $x_1=\sin^2\theta$，$x_2=\cos^2\theta$.

设 $a_n=A(\sin^2\theta)^n+B(\cos^2\theta)^n$，由初始值 $a_1=1$，$a_2=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$，

可解得 $a_n=\sin^{2n}\theta+\cos^{2n}\theta$.

考虑函数 $y=x^n$，$x\in(0,1)$ 为下凸函数，因此有 $\frac{x_1^n+x_2^n}{2}\geqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^n$，$x_1,x_2\in(0,1)$，

因此，有 $\frac{(\sin^2\theta)^n+(\cos^2\theta)^n}{2}\geqslant\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{2}\right)^n$，即 $a_n\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$.

另一方面，由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

得 $1^n=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^n=\sin^{2n}\theta+C_n^1\sin^2\theta(\cos^2\theta)^{n-1}+\cdots+\cos^{2n}\theta$

$$=a_n+\frac{1}{2}\left[C_n^1(\sin^2\theta\cos^{2n-2}\theta+\cos^2\theta\sin^{2n-2}\theta)+C_n^2(\sin^4\theta\cos^{2n-4}\theta+\cos^4\theta\sin^{2n-4}\theta)\right.$$

$$\left.+\cdots+C_n^{n-1}(\sin^{2n-2}\theta\cos^2\theta+\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta)\right]$$

$$\geqslant a_n+\sin^n\theta\cos^n\theta(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})=a_n+\frac{\sin^n 2\theta}{2^n}\cdot\frac{2^n-2}{2},$$

移项整理可得 $a_n\leqslant 1-\sin^n 2\theta\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. 综上可得 $\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant a_n\leqslant 1-\sin^n 2\theta\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

评注 本题系笔者为 2007 年浙江省数学夏令营命制的考试题的加强命题. 求数列的通项公式并不难，可有多种方法，但能够利证明不等式的同学并不多. 事实上，可从揣摩"2^n"的由来，想到对恒等式 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 两边进行 n 次方处理，并在此基础上进行分拆与合项证得结果.

例 14 （第 2 届女子奥林匹克试题）数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$，$n=1,2,\cdots$，证明

$$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$$



证明 由题设得：$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，所以

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}.$$

因此 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}$

$=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2003}-1}-\frac{1}{a_{2004}-1}\right)$

$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2004}-1}=1-\frac{1}{a_{2004}-1}.$

易知数列$\{a_n\}$是严格递增的，所以$a_{2004}>1$，故

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$$

为了证明左边不等式，只要证明$a_{2004}-1>2003^{2003}$。

由已知用数学归纳法可得$a_{n+1}=a_na_{n-1}\cdot\cdots\cdot a_1+1$，

及$a_n\cdot\cdots\cdot a_1>n^n(n\geqslant 1)$。

从而结论成立

评注 事实上2005年国家集训队的以下试题可视为例14的改编题，数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$，证明$\sum\limits_{k=1}^{n}a_k<1$。（解答见习题第15题）

例15 给定正整数$n\geqslant 2$，设正整数$a_i(i=1,2,\cdots,n)$满足$a_1<a_2<\cdots<a_n$以及$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$，求证：对任意实数$x$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

解 当$x^2\geqslant a_1(a_1-1)$时，由$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant 1$，可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i\,|\,x\,|}\right)^2=\frac{1}{4x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$\leqslant\frac{1}{4x^2}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

当$x^2<a_1(a_1-1)$时，由Cauchy不等式得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}.$$



对于正整数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，有 $a_{i+1} \geqslant a_i + 1, i = 1, 2, \cdots, n-1$，且

$$\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2} \leqslant \frac{2a_i}{\left(a_i^2+x^2+\frac{1}{4}\right)^2 - a_i^2}$$

$$= \frac{2a_i}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)\left(\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}$$

$$= \frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2},$$

$i = 1, 2, \cdots, n-1$.

所以 $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} - \frac{1}{\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+x^2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}.$$

习题精选 6

1. 若 $a>b>c$，求证：$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c} \geqslant \frac{4}{a-c}$.

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n，且满足 $a_n+2S_n\cdot S_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，$a_1=\frac{1}{2}$，若 $b_n=2(1-n)\cdot a_n(n\geqslant 2)$，求证：$b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2<1$.

3. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n^2+a_n$，$b_n=\frac{1}{1+a_n}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，$P_n=b_1b_2\cdots b_n$，试求 $2P_n+S_n$ 的值.

4. 函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$.

(1) 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？请给予证明；



(2) 令 $b_n = \frac{4}{4a_n - 1}$，$T_n = b_1 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2$，$S_n = 32 - \frac{16}{n}$，试比较 T_n 与 S_n 的大小。

5. 已知 $f(x)$ 为一次函数，$f[f(1)] = 1$，$f(x)$ 的图像关于直线 $x - y = 0$ 的对称的图像为 C，若点 $\left(n, \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)(n \in \mathbf{N}^*)$ 在曲线 C 上，并有 $a_1 = 1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1(n \geqslant 2)$。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及曲线 C 的方程；

(2) 设 $S_n = \frac{a_1}{3!} + \frac{a_2}{4!} + \frac{a_3}{5!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+2)!}$，对于一切 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $S_n > m$ 成立，求自然数 m 的最大值。

6. 某个在 Ox 轴的正方向运动的点的横坐标为 $x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$，其中 a 是一个正常数，求满足对所有的 $t \geqslant 0$，$x(t) \geqslant 24$ 的 a 的最小值

7. 已知数列 $a_1 = 3$，$a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1$，求证：$\prod_{k=1}^{n} a_k < 2^{2^n}$。

8. 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n(n \geqslant 2)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任意一个排列，求证：

$$\frac{1}{P_1 + P_2} + \frac{1}{P_2 + P_3} + \cdots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} + \frac{1}{P_n + P_1} > \frac{n-1}{n+2}.$$

9. (第 12 届 IMO 试题改编题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足：$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$，数列 $\{b_n\}$ 由下式定义：$b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}$，求证：$0 \leqslant b_n \leqslant 2$

10. 设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1}$，求证：$\frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_2 - a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n - a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1} - a_1} > 0$。

11. (2007《数学通报》问题征解 1677) 已知函数 $f(x) = \frac{2}{2^x + 1}$，$a \leqslant b \leqslant c$，求证：$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) \leqslant \frac{3}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = e^x - kx$，$x \in \mathbf{R}$，设函数 $F(x) = f(x) + f(-x)$，求证：$F(1)F(2)\cdots F(n) > (e^{n+1} + 2)^{\frac{n}{2}}(n \in \mathbf{N}^*)$。

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n + (-1)^n$，$n \geqslant 1$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：对任意的整数 $m > 4$，有 $\frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_m} < \frac{7}{8}$。



14 已知 $f(n)$ 定义在正整数集上，且满足 $f(1)=2$，$f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：对所有 $n>1$ 的整数，有 $1-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}}<\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{f(i)}<1-\dfrac{1}{2^{2^n}}$.

15 （2005 年国家集训队训练题）数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=\dfrac{1}{2}$，且

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1},n=1,2,\cdots$$

证明：对每一个正整数 n，都有 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$.





第[illegible]讲 和式变换

方法点津

阿贝尔 Abel(1802—1829)是挪威数学家，近代数学发展的先驱者. 阿贝尔在数学方面的成就是多方面的，其中与我们中学有关的主要是阿贝尔分部求和公式. 利用阿贝尔分部求和公式可较好地解决一些较复杂的数列求和、数列不等式综合问题. 有些著名的不等式，如钟开莱不等式，切比雪夫不等式等都可运用阿贝尔分部求和公式证明，而对于涉及两个数列的对应项之积的和的问题，利用阿贝尔分部求和公式更是"如鱼得水".

阿贝尔变换：

对于数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，记 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$，$k=1,2,\cdots,n$ 并记 $S_0=0$，则有 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=S_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k(b_k-b_{k+1})$，这个变换称为阿贝尔变换，也称为阿贝尔分部求和公式.

其他常用的和式变换恒等式有

(1) $a_ia_j+b_ib_j-a_ib_j-a_jb_i=(a_i-b_i)(a_j-b_j)$.

(2) $(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$；

(3) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2$；

(4) $(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)(\sum\limits_{j=1}^{m}b_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}a_ib_j=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_j$；

(5) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j=\sum\limits_{i=1}^{n}(\sum\limits_{j=i+1}^{n}a_ia_j)=\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{j-1}a_ia_j)$；

(6) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_ib_j=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)$；



(7) $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$.



典型例题

例1 (阿贝尔不等式)设 $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n > 0$, $m \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \leq M$ ($k=1,2,\cdots,n$),则有 $b_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq b_1 M$.

证明 由阿贝尔分部求和公式,得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = b_n\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big) - \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i\Big)(b_k - b_{k+1})$$

$$\leq M\Big[b_n + \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\Big] = b_1 M.$$

同理,有 $b_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.

例2 求和 $S=\sum_{k=1}^{n} k^2$.

解 令 $a_k = 1, b_k = k^2$ ($k = 1,2,\cdots,n$).

则 $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = k$, $b_k - b_{k+1} = k^2 - (k+1)^2 = -(2k+1)$,由阿贝尔分部求和公式(4)得

$$S = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1})$$

$$= n \cdot n^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k(2k+1) = n^3 - 2\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= n^3 - 2S + 2n^2 - \frac{(n-1)n}{2}.$$

移项,便可得

$$S = \frac{1}{3}\Big[n^3 + 2n^2 - \frac{(n-1)n}{2}\Big] = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

例3 证明 Lagrange 恒等式:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

并由此式说明 Cauchy 不等式成立.



证明 $(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i^2b_j^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_ia_jb_j$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2-2a_ib_ia_jb_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2$$

$$=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2.$$

故 Lagrange 恒等式成立. 又 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0$, 所以有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)\cdot(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2.$$

即 Cauchy 不等式成立.

例 4 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{2001}$ 满足 $\sum_{k=1}^{2000}|x_k-x_{k+1}|=2001$, 令 $y_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i$, $k=1,2,\cdots,2001$. 求 $\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|$ 的最大可能值.

解 设 $a_0=x_1$, $a_k=x_{k+1}-x_k$, $k=1,2,\cdots,2000$, 则 $x_1=a_0$, $x_k=\sum_{i=0}^{k-1}a_i$, $k=2,3,\cdots,2001$. 已知条件转化为 $\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=2001$. 此时

$$y_k=\frac{1}{k}[a_0+(a_0+a_1)+\cdots+\sum_{i=0}^{k-1}a_i]=\frac{1}{k}[ka_0+(k-1)a_1+\cdots+a_{k-1}]$$

$$y_{k+1}=\frac{1}{k+1}[(k+1)a_0+ka_1+\cdots+2a_{k-1}+a_k]$$

因此, $|y_k-y_{k+1}|=\left|\frac{1}{k(k+1)}(-a_1-2a_2-\cdots-ka_k)\right|\leqslant\frac{1}{k(k+1)}(|a_1|+2|a_2|+\cdots+k|a_k|)$

记 $A_k=|a_1|+2|a_2|+\cdots+k|a_k|$, $k=1,2,\cdots,2001$, $A_0=0$, $a_{2001}=0$, 则由阿贝尔分部求和公式的变形, 有

$$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{2000}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})A_k$$



$$=\sum_{k=1}^{2000}\frac{1}{k}(A_k-A_{k-1})-\frac{1}{2001}\cdot A_{2000}=\sum_{k=1}^{2000}|a_k|-\frac{1}{2001}\cdot A_{2000}.$$

又 $A_{2000}=|a_1|+2|a_2|+\cdots+2000|a_{2000}|\geqslant\sum_{k=1}^{2000}|a_k|$，故

$$\sum_{k=1}^{2000}|y_k-y_{k+1}|\leqslant\sum_{k=1}^{2000}|a_k|-\frac{1}{2001}\cdot\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=\frac{2000}{2001}\cdot\sum_{k=1}^{2000}|a_k|=2000$$

由解答过程知，当且仅当 $a_1=2001,a_2=a_3=\cdots=a_{2001}=0$ 时等号成立，故所求最大值为 2000.

例 5 已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是两两不相同的自然数列，求证：对任何正整数 n 有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

证明 由阿贝尔分部求和公式，及 $\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant\sum_{i=1}^{k}i\ (1\leqslant k\leqslant n)$

得 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$\geqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}\times\frac{2k+1}{k^2\times(k+1)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

例 6 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，$b_1\geqslant a_1$，$b_1b_2\geqslant a_1a_2$，$\cdots$，$b_1b_2\cdots b_n\geqslant a_1a_2\cdots a_n$，求证 $\sum_{i=1}^{n}b_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i$

证明 显然 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正数，令 $c_i=\frac{b_i}{a_i}$，则 $c_1\geqslant1,c_1c_2\geqslant1,\cdots,c_1c_2\cdots c_n\geqslant1$，

只要证明 $\sum_{k=1}^{n}a_k(c_k-1)\geqslant0$。由 $\sum_{i=1}^{k}c_i\geqslant k\sqrt[k]{c_1c_2\cdots c_k}\geqslant k$，得 $\sum_{i=1}^{k}(c_i-1)\geqslant0$

又由阿贝尔分部求和公式，得 $\sum_{k=1}^{n}a_k(c_k-1)=a_n\sum_{k=1}^{n}(c_k-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}(c_i-1)\right)\cdot(a_k-a_{k+1})\geqslant0$.

例 7 已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，记 $a_{n+1}=0$，$M=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|a_k-a_{k+1}|$，

求证：$\sum_{k=1}^{n}ka_k\leqslant\frac{1}{6}M\cdot n(n+1)(n+2)$



证明 由阿贝尔分部求和公式，得

$$\left|\sum_{k=1}^{n}ka_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}ka_k - a_{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)(a_k-a_{k+1})\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}C_{k+1}^2|a_k-a_{k+1}| \leqslant M\sum_{k=1}^{n}C_{k+1}^2 = MC_{n+2}^3 = \frac{1}{6}M\cdot n(n+1)(n+2).$$

例 8 已知 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n(a_1\neq a_n)$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$，试求 λ 的最小值，使不等式 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right|\leqslant\lambda(a_1-a_n)$ 恒成立．

解 令 $p=\sum_{x_i>0}x_i$，$q=-\sum_{x_i<0}x_i$，则 $p-q=0$，$p+q=1$，从而有 $p=q=\frac{1}{2}$，于是有 $-\frac{1}{2}\leqslant\sum_{i=1}^{k}x_i\leqslant\frac{1}{2}(1\leqslant k\leqslant n)$．

由阿贝尔分部求和公式，得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right| = \left|a_n\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)(a_k-a_{k+1})\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left|\sum_{i=1}^{k}x_i\right|(a_k-a_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})=\frac{1}{2}(a_1-a_n).$$

当 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_n=-\frac{1}{2}$，其余 $x_i=0$ 时上式取等号，故 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$．

评注 在上题中令 $a_k=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$，$\lambda=\frac{1}{2}$ 得下题：

(1989 年全国联赛试题）若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$，试证 $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$．

例 9 试证，对任意实数 x，有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}\leqslant[nx]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．

证明 记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{[kx]}{k}$，以下用数学归纳法证明 $A_n\leqslant[nx]$．

(1) 当 $n=1$ 时，结论显然成立；

(2) 假设 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 时，有 $A_k\leqslant[kx]$，由阿贝尔分部求和公式，有

$$nA_n=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{[kx]}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}A_k[k-(k+1)]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[kx]+\sum_{k=1}^{n-1}A_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}[kx]+\sum_{k=1}^{n-1}[kx]．$$



$$= [nx] + \sum_{k=1}^{n-1}([(n-k)x] + [kx])$$

$$\leqslant [nx] + \sum_{k=1}^{n-1}[(n-k)x + kx]\ (\because [x]+[y]\leqslant[x+y])$$

$$= n[nx].$$

由(1)，(2)可知 $A_n \leqslant [nx]$.

评注 根据阿贝尔分部求和公式的结构特征，不难发现部分和 $S_k=\sum_{i=1}^{k}a_i\ (1\leqslant k\leqslant n-1)$ 与 $S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\ (k=n)$ 之间有着相互依赖的关系，这就为使用数学归纳法提供了实质性的技术手段.

例 10 若 $a_i>0, b_i>0, a_ib_i=c_i^2+d_i^2\ (i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2$$

等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{a_j}=\frac{b_i}{b_j}=\frac{c_i}{c_j}=\frac{d_i}{d_j}\ (1\leqslant i<j\leqslant n)$.

证明 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}d_i\right)^2$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_ic_j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_id_j$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j-c_ic_j-d_id_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j+a_jb_i-2c_ic_j-2d_id_j)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_i}{a_j}(c_j^2+d_j^2)+\frac{a_j}{a_i}(c_i^2+d_i^2)-2c_ic_j-2d_id_j\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}c_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}c_i\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}d_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}d_i\right)^2\right]\geqslant 0.$$

等号成立当且仅当

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{a_i}{a_j}}c_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}c_i=0,\\ \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}d_j-\sqrt{\frac{a_j}{a_i}}d_i=0.\end{cases}\quad(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

即 $a_ic_j=a_jc_i$, ①

$a_id_j=a_jd_i$ ②



由 ①^2 + ②^2，得 $a^2(c_i^2+d_i^2)=a_i^2(c^2+d^2)$，即 $a^2a_ib_i=a_i^2ab$，

故 $\frac{a}{a_i}=\frac{b}{b_i}$． ③

由①、②、③立刻得到，等号成立当且仅当 $\frac{a_i}{a_j}=\frac{b_i}{b_j}=\frac{c_i}{c_j}=\frac{d_i}{d_j}$ $(1\leqslant i<j\leqslant n)$．

另证 $\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^n d_i\right)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(c_ic_j+d_id_j)$

$\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{c_i^2+d_i^2}\cdot\sqrt{c_j^2+d_j^2}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{a_ib_i}\cdot\sqrt{a_jb_j}$

$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sqrt{a_ib_j}\cdot\sqrt{a_jb_i}\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{a_ib_j+a_jb_i}{2}$

习题精选7

1．(钟开莱不等式)设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0$，$\sum_{i=1}^k a_i\leqslant\sum_{i=1}^k b_i\ (1\leqslant k\leqslant n)$，则有

(1) $\sum_{i=1}^n a_i^2\leqslant\sum_{i=1}^n b_i^2$；(2) $\sum_{i=1}^n a_i^3\leqslant\sum_{i=1}^n a_ib_i^2$．

2．(切比雪夫不等式)设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$n\cdot\sum_{k=1}^n a_kb_k\geqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^n b_k\right)\geqslant n\cdot\sum_{k=1}^n a_kb_{n-k+1}.$$

3．(排序不等式)设有两个有序数列 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 及 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$．求证 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$(顺序和)$\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}$(乱序和)$\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$(逆序和)．

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任意一个排列．

4．设 $a_1,a_2,\cdots$ 是正实数列，且对所有 $i,j=1,2,\cdots$ 满足 $a_{i+j}\leqslant a_i+a_j$．求证：对于正整数 n，有 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\geqslant a_n$．

5．证明：对每个正整数 n，有 $\frac{2n+1}{3}\sqrt{n}\leqslant\sum_{i=1}^n\sqrt{i}\leqslant\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}-\frac{1}{6}$．

不等式两边等号成立当且仅当 $n=1$．

6．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数，记 $x_{n+1}=x_1$，$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，求证：



$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1+x_i^2}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a),$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立。

7. 设 $n \geqslant \ldots, a_1,a_2,\cdots,a_n>0, b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}$，且不全为 0，$\sum_{i\neq j}a_ib_j=0$，证明：$\sum_{i\neq j}b_ib_j=0$

8. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都是正实数，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{a_i+b_i}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right),$$

当且仅当 $\frac{a_i}{b_i}$ 是常数时，等号成立.

9. 设 $n\in\mathbf{N}^*, n\geqslant 3, x_1<x_2<\cdots<x_n$，证明：

$$\frac{n(n-1)}{2}\sum_{i<j}x_ix_j>\left(\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\right)\left(\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\right)$$

10. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个非负实数（$n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*$），且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=n$，$\sum_{i=1}^{n}ix_i=2n-2$，求代数式 $S=\sum_{i=1}^{n}i^2x_i$ 的最大值.





第讲 巧妙构造

方法点津

构造性解题是一个古老而又崭新的科学方法，历史上许多著名的数学家，如欧几里得、高斯、欧拉、拉格朗日、康托等都曾运用这一方法解决过数学难题。近年来，构造的方法及其应用已逐渐为数学教育界所重视，尤其是在数学竞赛中，用构造法解决的例子不胜枚举。

构造是代数变形中较高层次的内容，我们在代数变形中，有时直接推理或运算不能顺利进行，不得不寻找某些中介工具沟通条件和结论的联系，而这种中介工具往往隐含在题设条件之中，需要我们去发掘、去发现、去构造。因此，构造一个与之有关的辅助命题，也就是在已知与未知间搭桥，借以沟通"条件"和"结论"就显得尤为必要。

因此，构造法的实质，是根据数学问题的条件或结论所具有的特征，以条件中的元素为"元件"，以数学关系为"支架"，通过创造性思维构造出一种相关的数学对象，一种新的数学形式，使原问题得以转化并顺利解决。从思维方式上来说，这种方法较多地含有直觉思维的因素。

另外，值得注意的是构造法解题贵在"创新"，在解题时往往要打破常规，另辟蹊径，表现出简捷、明快、精巧等特点。构造法的核心是"构造"，即直接构造有关结论、指标、算法、程序而立即将问题解决，或构造模型、图形、实例、中介辅助元素（辅助命题、函数、方程、数列、不等式、向量、特殊曲线等），沟通数学的条件与结论间的内在联系，从而使问题得到解决。

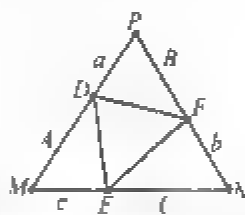




典型例题

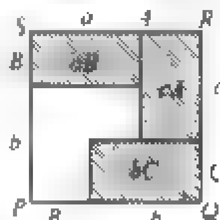
例1 设正数 a,b,c 和 A,B,C 满足 $a+A=b+B=c+C=k$，求证 $aB+bC+cA<k^2$。

证法一 构造边长为 k 的正 $\triangle PMN$，取点 D,E,F 如图所示。



显然 $\triangle DEF$ 恒存在，则 $S_{\triangle PDF}+S_{\triangle MED}+S_{\triangle NFE}<S_{\triangle PMN}$，由此有 $\frac{1}{2}(aB+bC+cA)\sin60^\circ<\frac{1}{2}k^2\sin60^\circ$，即证。

证法二 作正方形 $PQRS$，并在边上取线段，线段长满足题设并如图所示，由阴影部分面积小于正方形面积即证。



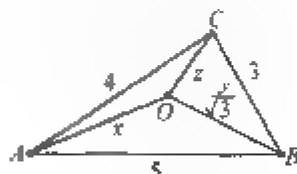
证法三 作立方体，使棱长为 k，并在共顶点的三条棱上取满足题设的线段长，则 $k^3=(a+A)(b+B)(c+C)=abc+ABC+k(aB+bC+cA)>k(aB+bC+cA)$，即证。

评注 通过构建几何模型，将题设中的代数关系转化为几何模型，从而通过几何关系直接可以判断出不等关系，从而解决问题。通过本题可以看出，构建的几何模型并非唯一，只要满足题设的条件和要求即可。构造几何模型，将代数问题转化为几何模型是构造法解题的一种常用方法。

例2 正数 x,y,z 满足方程组
$$\begin{cases}x^2+xy+\frac{1}{3}y^2=25,\\ \frac{1}{3}y^2+z^2=9,\\ z^2+zx+x^2=16,\end{cases}$$
求 $xy+2yz+3zx$ 的值。

解 将原方程组变形为
$$\begin{cases}x^2-2x\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)\cos150^\circ+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)^2=5^2,\\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}y\right)^2+z^2=3^2,\\ z^2-2zx\cos120^\circ+x^2=4^2.\end{cases}$$

由此，逆用余弦定理，构造 $\triangle OAB$、$\triangle OBC$ 和 $\triangle OAC$，得 $\triangle ABC$。



因 $AC^2+BC^2=AB^2$，故 $\angle ACB=90^\circ$。

从而 $6 = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PAC} = \frac{1}{4\sqrt{3}}(xy + 2yz + 3zx)$

即 $xy + 2yz + 3zx = 24\sqrt{3}$

评注 利用题设中三个方程的结构特征，将其转化为余弦定理的模型，从而构造三角形模型，解决了求值问题。

例 3 设 x,y,z 为实数，证明：对任意 $\triangle ABC$，都有 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B$

解 构造二次函数 $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 - (2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B)$

$$= x^2 - (2y\cos C + 2z\cos B)x + y^2 + z^2 - 2yz\cos A$$

考虑判别式：

$\Delta = (2y\cos C + 2z\cos B)^2 - 4(y^2 + z^2 - 2yz\cos A)$

(在 $\triangle ABC$ 中 $\cos A = -(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$)

$= -4y^2\sin^2 C - 4z^2\sin^2 B + 8yz\sin B\sin C$

$= -4(y\sin C - z\sin B)^2 \leq 0$

故 $f(x) \geq 0$，即证。

评注 构造辅助元素是数学方法中最常用的基本形式之一。构造辅助元素也是多种多样，常见的有利用三角函数、方程(组)、多项式、数列(组)、不等式、复数、向量、圆锥曲线以及辅助命题等等。本题就是根据题意构造二次函数，利用判别式证明不等式恒成立。

例 4 解方程 $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$

解 由 $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$，构造等差数列 $\sqrt{x-1}, \frac{1}{2}, \sqrt{2-x}$，故可以设

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} - d, & ① \\ \sqrt{2-x} = \frac{1}{2} + d. & ② \end{cases}$$

由 $①^2 + ②^2$，得 $1 = (\frac{1}{2} - d)^2 + (\frac{1}{2} + d)^2$。

化简、因式分解，得 $(2d-1)(2d+1)(2d-5) = 0$，所以 $d = \frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{5}{2}$

分别代入①，得 $\sqrt{x-1} = 0$ 或 1 或 3，解得 $x = 1$ 或 2 或 10

经检验知，原方程的解为 $x = 1$ 或 2 或 10

评注 一般地，形如 $\sqrt[m]{f(x)} + \sqrt[n]{g(x)} = a$ (常数)，$m,n \in \mathbf{N}$ 且 $m,n > 1$，$f(x) + g(x)$ 为常数的无理方程，都可以用构造等差数列来求解。



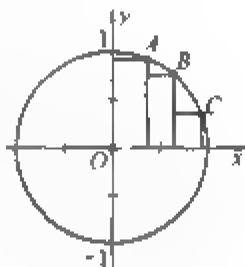
例 5 设 $x,y,z\in \mathbf{R}$，$0<z<y<x<\frac{\pi}{2}$，求证：$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$

解 由二倍角公式得：$\frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>2\sin x\cos x+2\sin y\cos y+2\sin z\cos z$

即证 $\frac{\pi}{4}>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$

构造以原点为圆心的单位圆，如图所示，$A(\cos x,\sin x)$，$B(\cos y,\sin y)$，$C(\cos z,\sin z)$为单位圆上三个点，分别过此三点作 x 轴、y 轴的垂线得三个矩形，而不等式右端即为三个矩形的面积之和，它显然小于$\frac{\pi}{4}$。



评注 本题若直接从不等式角度进行证明显然很困难，但通过构造单位圆，将三角函数值转化成点的坐标，通过面积直接就证明了不等式。

例 6 设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $x^2+y^2=1$，求证：

对任意正数 a,b 有$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}\geqslant a+b$

解 设 $z_1=ax+by\mathrm{i}$，$z_2=bx+ay\mathrm{i}$，

由 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$，则

$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}$

$\geqslant\sqrt{(ax+bx)^2+(by+ay)^2}$

$=\sqrt{(a+b)^2(x^2+y^2)}$

$=a+b$.

例 7 已知多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，且 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$都是整数，求证：当 x 是整数时，$f(x)$是整数

解 把 $-1,0,1,2$ 的值分别代入得到有关 a,b,c,d 的方程，但不易推出 a,b,c,d 是否为整数。若把 $f(x)$用拉格朗日插值公式来表示，则是否为整数就一目了然了。

由拉格朗日插值公式构造多项式

$f(x)=-\frac{(x-2)(x-1)x}{6}\cdot f(-1)+\frac{(x-2)(x-1)(x+1)}{2}\cdot f(0)+$

$\frac{(x-2)x(x+1)}{-2}\cdot f(1)+\frac{(x-1)x(x+1)}{6}\cdot f(2)$.



因为 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 都是整数，且当 x 为整数时，$2\mid(x+2)(x+1)$，$6\mid(x+2)(x+1)x$，$2\mid x(x+1)$，$6\mid(x+1)x(x-1)$，所以，当 x 为整数时，$f(x)$ 也是整数.

例 8 若 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，且 $x+y+z=1$，n 是正整数，求证：

$$\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}\geqslant\frac{3^n}{3^{n+2}-9}\qquad(*)$$

证明 由已知条件知 $1-x^n>0$，$1-y^n>0$，$1-z^n>0$. 构造向量

$$\boldsymbol{a}=\left(\frac{x^2}{\sqrt{y(1-y^n)}},\frac{y^2}{\sqrt{z(1-z^n)}},\frac{z^2}{\sqrt{x(1-x^n)}}\right),$$

$$\boldsymbol{b}=\left(\sqrt{y(1-y^n)},\sqrt{z(1-z^n)},\sqrt{x(1-x^n)}\right).$$

由 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$，得 $(x^2+y^2+z^2)^2$

$$\leqslant\left[\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}\right][y(1-y^n)+z(1-z^n)+x(1-x^n)].$$

所以
$$\frac{x^4}{y(1-y^n)}+\frac{y^4}{z(1-z^n)}+\frac{z^4}{x(1-x^n)}$$
$$\geqslant\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(x+y+z)-(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})}$$
$$\geqslant\frac{\left[3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2\right]^2}{(x+y+z)-3\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{n+1}}$$
$$=\frac{\left[3\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^2}{1-3\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\frac{3^n}{3^{n+2}-9}.$$

评注 在不等式$(*)$中，若取 $n=1$，即得 $\frac{x^4}{y(1-y)}+\frac{y^4}{z(1-z)}+\frac{z^4}{x(1-x)}\geqslant\frac{1}{6}$.
在不等式$(*)$，若取 $n=2$，即得：$\frac{x^4}{y(1-y^2)}+\frac{y^4}{z(1-z^2)}+\frac{z^4}{x(1-x^2)}\geqslant\frac{1}{8}$.

例 9 求证：$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$，其中，$n\in\mathbf{N}$，且 $n\geqslant2$.

证明 构造数列$\{T_n\}$：$1+\frac{1}{3}$，$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$，…，$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$，…，则

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=1+\frac{1}{2n+1}=\sqrt{\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2}}>\sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(2n+1)^2}}=\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}.$$

于是，$\dfrac{T_{n+1}}{\sqrt{2n+3}}>\dfrac{T_n}{\sqrt{2n+1}}$

所以，数列$\left\{\dfrac{T_n}{\sqrt{2n+1}}\right\}$单调递增，其首项为$\dfrac{T_1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

故 $T_n>\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\sqrt{2n+1}>\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$.

即 $\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)>\dfrac{\sqrt{2n+1}}{2}$

例 10 已知a、b、x、y满足方程组

$$\begin{cases}ax+by=3,\\ ax^2+by^2=7,\\ ax^3+by^3=16,\\ ax^4+by^4=42\end{cases}$$

求ax^5+by^5的值

解 本题待求式幂较高，但若注意到待求式与已知式有一共同特征，即每个方程关于x、y的系数均相同，且方程的次数逐个高一次，故可用$x+y$去乘各个方程，建立递推关系式

由已知条件构造递推式$s_n=ax^n+by^n$，$n=1,2,\cdots$.

则$s_{n+2}=ax^{n+2}+by^{n+2}=(ax^{n+1}+by^{n+1})(x+y)-xy(ax^n+by^n)$.

因此，$s_{n+2}=(x+y)s_{n+1}-xys_n$.

将已知方程代入可得方程组

$$16=7(x+y)-3xy,$$
$$42=16(x+y)-7xy.$$

解得$x+y=-14$，$xy=-38$.

故$s_5=(x+y)s_4-xys_3=-14\times42+38\times16=20$.

即 $ax^5+by^5=20$.

例 11 （第 41 届 IMO 试题）设a、b、c是正数，且$abc=1$，求证：

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant1$$

解 由条件得$c=\dfrac{1}{ab}$，$\dfrac{1}{b}=ac$，将其代入不等式并化简，得



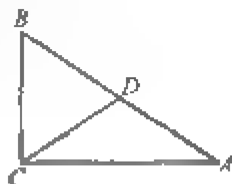
$$(a-1+ac)(a+1-ac)(ac+1-a)\leqslant a\cdot ac\cdot 1. \quad ①$$

式①关于 $a,ac,1$ 轮换对称，不妨设 $a\geqslant ac,a\geqslant 1$.

若 $a\geqslant ac+1$，易知式①左边小于或等于 0，式①显然成立.

若 $a<ac+1$，可知式①左边三个括号内均为正数，于是，可构造恰当的图形，借助图形直观来辅助证明.

如图，在 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle C=90^\circ$，CD 为边 AB 的中线，令



$BC=\sqrt{a-1+ac}$,

$AC=\sqrt{a+1-ac}$,

$AB=\sqrt{2a}$,

$CD=\frac{1}{2}\sqrt{2a}$

由面积公式有 $\frac{1}{2}AC\cdot BC\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot CD$，

当且仅当 $AC=BC$ 时等号成立. 故

$\sqrt{(a+1-ac)(a-1+ac)}\leqslant\sqrt{2a}\times\frac{1}{2}\sqrt{2a}=a$

同理可得 $\sqrt{(a+1-ac)(ac+1-a)}\leqslant\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{2}=1$,

$\sqrt{(ac+1-a)(a-1+ac)}\leqslant\sqrt{2ac}\times\frac{1}{2}\sqrt{2ac}=ac$.

将上面三个式子相乘得 $\sqrt{(a-1+ac)^2(a+1-ac)^2(ac+1-a)^2}\leqslant a^2c$，

即 $(a-1+ac)(a+1-ac)(ac+1-a)\leqslant a^2c$.

故 $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立

例 12 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为实数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 求证：$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\right)\leqslant\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}$.

证明 题目的结论具有判别式结构，构造相应的二次函数，令

$$f(x)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)x^2-\left(\frac{\lambda_1+\lambda_n}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i\right).$$

要证 $\Delta\geqslant 0$，只要证存在 x_0，使 $f(x_0)\leqslant 0$ 即可. 根据 $f(x)$ 的化简特征，取 $x_0=\sqrt{\lambda_1\lambda_n}$

$$f(\sqrt{\lambda_1\lambda_n})=a_1\lambda_n+a_n\lambda_1+\sum_{i=2}^{n-1}\frac{a_i}{\lambda_i}\cdot\lambda_1\lambda_n-(\lambda_1+\lambda_n)+a_1\lambda_1+a_n\lambda_n+\sum_{i=2}^{n-1}a_i\lambda_i$$



$$= (\lambda_1 + \lambda_n)(a_1 + \cdots + a_n) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_1\lambda_n + \lambda_i^2}{\lambda_i}\right)a_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{(\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_n)}{\lambda_i} \leqslant 0$$

因为 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i} > 0$,$f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线,故

$$\Delta = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_n}{\sqrt{\lambda_1\lambda_n}}\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i\right) \geqslant 0$$

习题精选 8

1. 设 a,b,c 是绝对值小于1的实数,证明:$ab + bc + ca + 1 > 0$.
2. 证明:当 $x \neq 0$ 且 $x > -1$ 时,对于 $n \in \mathbf{N}^*$ 有 $(1+x)^n \geqslant nx$.
3. 设实数 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 满足 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$,求证
   $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \geqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)\cdot(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$.
4. 求证 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.
5. 设 $x,y,z \in (0,1)$,求证:$x(1-y)(1-z) + (1-x)y(1-z) + (1-x)(1-y)z < 1$.
6. $\triangle ABC$ 的三边长 a,b,c 满足 $a+b+c=1$,求证:$5(a^2+b^2+c^2) + 18abc \geqslant \frac{7}{3}$.
7. 设 x,y,z 为非负实数,且 $x+y+z=1$,求证:$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant \frac{7}{27}$.
8. 已知 $a,b,c \in (-1,1)$,求证:$abc + 2 > a + b + c$.
9. 已知 $a>1,b>1,c>1$,求证:$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{a-1} \geqslant 12$.
10. 解方程组:$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$
11. 设 a,b 为正实数,且 $|\alpha| > a$,则不论 θ 取何值时,总有

$$\frac{\alpha\beta - \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{\alpha^2 - a^2} \leqslant \frac{\beta + b\sin\theta}{\alpha + a\cos\theta} \leqslant \frac{\alpha\beta + \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}}{\alpha^2 - a^2}$$



12. 已知 a、b、c 为正实数，且 $a+b+c=1$，求 $u=\frac{3a^2-a}{1+a^2}+\frac{3b^2-b}{1+b^2}+\frac{3c^2-c}{1+c^2}$ 的最小值

13. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为实数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=A(A>0)$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=\frac{A^2}{n-1}$，$(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 2)$，求证：$0\leqslant a_k\leqslant\frac{2A}{n}(k=1,2,\cdots,n)$.



习题解答

习题精选 1

1 解法1

原式 [illegible]

解法2：

原式 [illegible]

2 证明 为[illegible]出题结论中角的关系，我们将已知条件中的角变形．在 $2(\alpha+\gamma)$ 中加进 $\beta-\beta$，则 $2(\alpha+\gamma)=2(\alpha-\gamma)+\beta-\beta=(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta-\gamma)$，在 2β 中加进 $(\alpha+\gamma)-(\alpha+\gamma)$，则 $2\beta=(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)$，故由已知条件得 [illegible] $\sin[(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)]$ [illegible]

利用两角和、差的正弦公式，并移项整理得 $\tan(\alpha+\beta-\gamma)=$ [illegible] $\tan(\alpha-\beta+\gamma)$

3 解 在每一项后面加进 $0=k-k$，即

$$k^2=k^2+k-k=k(k+1)-k=2C_{k+1}^2-k, \quad k=1,2,3,\cdots,n$$



$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=2\sum_{k=1}^{n}C_k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=2(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=2C_{n+1}^3+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4. 证明 在不等式左边把 a 加上 $\frac{b}{2}-\frac{b}{2}$，b 加上 $\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$，则

$a=a+\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$，$b=b+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}$

$$\frac{a^n+b^n}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)^n+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^n\right]$$

$$=\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+C_n^4\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4+\cdots\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$$

5. 证明 因为 $5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot2^{n-1}=5\cdot25^n+9\cdot3^n\cdot\frac{1}{2}\cdot2^n=5\cdot25^n+\frac{9}{2}\cdot6^n=\frac{1}{2}(10\cdot25^n+9\cdot6^n)$

在圆括号内加减 $-10\cdot6^n+10\cdot6^n$，得

$$5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot2^{n-1}=\frac{1}{2}(10\cdot25^n-10\cdot6^n+10\cdot6^n+9\cdot6^n)=5(25^n-6^n)+19\cdot\frac{6^n}{2}$$

$$=5\cdot19(25^{n-1}+6\cdot25^{n-2}+6^2\cdot25^{n-3}+\cdots+6^{n-1})+19\cdot\frac{6^n}{2}$$

因为 $\frac{6^n}{2}$ 是整数，所以原式能被 19 整除.

6. 解 由第二式得 $2A\sin x\cos x+2B\cos^2x=(B+C)(\sin^2x+\cos^2x)$

即 $2A\tan x+2B=(B+C)(\tan^2x+1)$

所以 $2A\left(-\frac{b}{a}\right)+2B=(C+B)\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)$，上式化简后即得所要证明的等式.

7. 证明 $\frac{a^2}{t^2}+\frac{b^2}{1-t^2}=1\times\left(\frac{a^2}{t^2}+\frac{b^2}{1-t^2}\right)=[t^2+(1-t^2)]\left[\frac{a^2}{t^2}+\frac{b^2}{1-t^2}\right]$

$=a^2+b^2+\frac{1-t^2}{t^2}a^2+\frac{t^2}{1-t^2}b^2\geq a^2+b^2+2\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}a^2\cdot\frac{t^2}{1-t^2}b^2}$

$=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2\ (ab>0)$

8. 证明 令 $x=\frac{1}{a}$，$y=\frac{1}{b}$，$z=\frac{1}{c}$，则 $xyz=1$，于是，问题转化为证明

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$$

而 $[(y+z)+(z+x)+(x+y)]\cdot\left[\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right]\geq(x+y+z)^2$，

则 $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{1}{2}(x+y+z)\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz}=\frac{3}{2}$

9. 证法1 不妨设 $a+b+c=1$

于是，原不等式转化为证明 $\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+1\geq4\sqrt{3}\cdot\sqrt{abc}$



即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}\geqslant 4\sqrt{3}$.

而 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\frac{1}{\sqrt{abc}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\underbrace{\frac{1}{9\sqrt{abc}}+\cdots+\frac{1}{9\sqrt{abc}}}_{9}$

$\geqslant 12\sqrt[12]{\sqrt{abc}\cdot\frac{1}{9^9(\sqrt{abc})^9}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{abc}}\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\frac{a+b+c}{3}}=4\sqrt{3}$.

因此，原不等式成立.

证法 2 不妨设 $abc=1$，于是，原不等式转化为证明

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+(a+b+c)^2\geqslant 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{a+b+c}$

记 $t=\sqrt{a+b+c}$，易知 $t\geqslant\sqrt{3}$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\geqslant 3$.

故只须证 $3+t^4\geqslant 4\sqrt{3}t$，即 $t^3+\frac{3}{t}\geqslant 4\sqrt{3}$.

而 $t^3+\frac{3}{t}=\frac{t^3}{3}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^3}{3}+\frac{3}{t}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{t^9}{3^3}\cdot\frac{3}{t}}=\frac{4}{\sqrt{3}}t^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^2=4\sqrt{3}$.

10. 解 给所求式中的每一个分式配一个常数1，进行通分后，再将 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 用常数1代换，得

$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+1=\frac{1+(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{2-a_1}=\frac{2}{2-a_1}$

同理可得 $\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+1=\frac{2}{2-a_2}$，…，$\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}+1=\frac{2}{2-a_n}$

令 $y=\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n}+\cdots+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}$

则 $y+n=\frac{2}{2-a_1}+\frac{2}{2-a_2}+\cdots+\frac{2}{2-a_n}$

为了利用 Cauchy 不等式，注意到

$(2-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(2-a_n)=2n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=2n-1$

所以 $(2n-1)\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right)$

$=[(2-a_1)+(2-a_2)+\cdots+(2-a_n)]\cdot\left(\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_n}\right)$

$\geqslant\left[\sqrt{2-a_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_1}}+\sqrt{2-a_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_2}}+\cdots+\sqrt{2-a_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2-a_n}}\right]^2=n^2$

因此，$y+n\geqslant\frac{2n^2}{2n-1}$，$y\geqslant\frac{2n^2}{2n-1}-n=\frac{n}{2n-1}$.

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时成立，从而 y 有最小值 $\frac{n}{2n-1}$.

习题精选 2

1. 解 设 $A=(\sqrt{3}+1)^6$，$B=(\sqrt{3}-1)^6$，考察



$A+B=(\sqrt{3}+1)^6+(\sqrt{3}-1)^6=2[(\sqrt{3})^6+C_6^2(\sqrt{3})^4+C_6^4(\sqrt{3})^2+1]=416$

由于 $0<\sqrt{3}-1<1$，有 $0<(\sqrt{3}-1)^6<1$，于是 $(\sqrt{3}+1)^6$ 的整数部分为 41

2. 证明 记不等式中间部分为 M，构造配对式

$$N=\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{101}$$

注意到 $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$，则有

$M<N$，$M^2<MN=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}\Rightarrow M<\frac{1}{10}$

又 $2M=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{99}{100}\times 1>\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{101}=N$

所以，$2M^2>MN=\frac{1}{101}$

故 $M>\frac{1}{\sqrt{202}}>\frac{1}{15}$，因此，$\frac{1}{15}<M<\frac{1}{10}$

3. 证明 记不等式左边为 M，构造配对式

$N=\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}\times\frac{9}{8}\times\cdots\times\frac{3n}{3n-1}$

$P=\frac{4}{3}\times\frac{7}{6}\times\frac{10}{9}\times\cdots\times\frac{3n+1}{3n}$

由 $\frac{k+1}{k}>\frac{k+2}{k+1}>\frac{k+3}{k+2}$，$k\in\mathbf{N}^*$，可知

$M>N>P>0$，$M^3>MNP=3n+1$.

故 $M>\sqrt[3]{3n+1}$

4. 证明 记 $M=k!$，即 $M=1\times2\times3\times\cdots\times(k-1)\times k$

将 M 逆序有 $M=k\times(k-1)\times\cdots\times3\times2\times1$

两式相乘，得 $M^2=(k!)^2=\prod_{i=1}^{k}[i(k-i+1)]<\prod_{i=1}^{k}\left[\frac{i+(k-i+1)}{2}\right]^2=\left(\frac{k+1}{2}\right)^{2k}$

故 $\left(\frac{k+1}{2}\right)^k>k!$

5. 证明 构造 A_n 的配偶式 $B_n=(a^2+b^2)^n\cos n\theta$，我们证明更强的结论：$A_n$、$B_n$ 均是整数

(1) 当 $n=1$ 时，$\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$，于是 $A_1=2ab$，$B_1=a^2-b^2$，A_1 与 B_1 都是整数.

(2) 假设当 $n=k$ 时，A_k、B_k 都是整数，则当 $N=k+1$ 时，

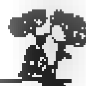
$A_{k+1}=(a^2+b^2)^{k+1}\sin(k\theta+\theta)=(a^2+b^2)^{k+1}(\sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta)=A_kB_1+B_kA_1\in\mathbf{Z}$.

同理，$B_{k+1}=B_kB_1-A_kA_1\in\mathbf{Z}$

由(1)、(2)知 A_n、B_n 均是整数

注 此题还可由 $A_n+B_n\mathrm{i}$ 求解，请读者自证

6. 证明 构造 A 的配偶式 $B=k+\frac{1}{2}-\sqrt{k^2-\frac{1}{4}}$，并设 $C_n=A^n+B^n-1$



下证 U_n 能被 k 整除.

因 $A+B=2k+1$, $AB=k$, 故 A, B 是方程 $x^2-(2k+1)x+k=0$ 的两个根. 从而,

$A^n-(2k+1)A^{n-1}+kA^{n-2}=0$, $B^n-(2k+1)B^{n-1}+kB^{n-2}=0$.

两式相加得 $(U_n+1)-(2k+1)(U_{n-1}+1)+k(U_{n-2}+1)=0$.

整理得 $U_n=(2k+1)U_{n-1}-kU_{n-2}+k(n\geqslant 3)$.

由此递推式及 $U_1=2k$, $U_2=(4k+2)k$, 并用数学归纳法可以证明 k 能整除 U_n.

$\because 0<B<1$ $\therefore 0<1-B^n<1$.

从而, $U_n=[U_n]=[U_n+1-B^n]=[A^n]$, 故 $[A^n]$ 能被 k 整除.

7. 证明 设 $A=(1+\cot 1^\circ)(1+\cot 2^\circ)\cdots(1+\cot 134^\circ)$, 构造其配偶式 $A=(1+\cot 134^\circ)(1+\cot 133^\circ)\cdots(1+\cot 1^\circ)$.

两式相乘, 并注意到 $(1+\cot\alpha)[1+\cot(135^\circ-\alpha)]=2$, 得 $A^2=2^{134}$, 从而 $A=2^{67}$.

8. 证明 记不等式左边为 A, 变形得 $A=C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}$.

倒写过来就有 $A=C_n^{n-1}a^{n-1}b+C_n^{n-2}a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^1ab^{n-1}$.

两式相加, 得 $2A=C_n^1(a^{n-1}b+ab^{n-1})+C_n^2(a^{n-2}b^2+a^2b^{n-2})+\cdots+C_n^{n-1}(ab^{n-1}+a^{n-1}b)$

$$\geqslant 2(C_n^1\sqrt{a^nb^n}+C_n^2\sqrt{a^nb^n}+\cdots+C_n^{n-1}\sqrt{a^nb^n})\geqslant 2(ab)^{\frac{n}{2}}(C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1})$$

$$\geqslant 2\cdot 4^{\frac{n}{2}}\cdot(2^n-2)\text{(由 }\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\text{ 易证 }ab\geqslant 4)$$

$$=2\cdot(2^{2n}-2^{n+1})\quad\therefore A\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

9. 证明 由均值不等式, 可得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{9a}\geqslant\frac{2}{3},\quad \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{9b}\geqslant\frac{2}{3},$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{9c}\geqslant\frac{2}{3}.$$

令 $M=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$,

$N=\frac{\sqrt{a^2+8bc}}{9a}+\frac{\sqrt{b^2+8ca}}{9b}+\frac{\sqrt{c^2+8ab}}{9c}$.

则 $M+N\geqslant\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2$.

$$M-N=\frac{9a^2-(a^2+8bc)}{9a\cdot\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{9b^2-(b^2+8ca)}{9b\cdot\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{9c^2-(c^2+8ab)}{9c\cdot\sqrt{c^2+8ab}}$$

令 $m=\max\{9a\cdot\sqrt{a^2+8bc}, 9b\cdot\sqrt{b^2+8ca}, 9c\cdot\sqrt{c^2+8ab}\}$,

则 $M-N\geqslant\frac{8(a^2+b^2+c^2)-8(ab+bc+ca)}{m}\geqslant 0$.

因此, $M\geqslant 1$, 即得证.

10. 证明 由已知条件知 $a^2-bc+1\geqslant-\frac{1}{3}+1>0$.

同理 $b^2-ca+1>0$, $c^2-ab+1>0$.



另外,$a+b+c>0$. 令

$$M=\frac{a}{a^2-bc+1}+\frac{b}{b^2-ca+1}+\frac{c}{c^2-ab+1}\quad ①$$

$$N=\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\quad ②$$

由 Cauchy 不等式

$M(a(a^2-bc+1)+b(b^2-ca+1)+c(c^2-ab+1))\geqslant(a+b+c)^2$,故

$$M\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3-3abc+a+b+c}=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+1}$$

$$=\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}=\frac{1}{a+b+c}.\quad ③$$

由②式,结合已知条件知,

$$\frac{N}{3}=\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}+\frac{bc+ca+ab}{b^2-ca+1}+\frac{ca+ab+bc}{c^2-ab+1}.\quad ④$$

另外,

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2-bc+1}=\frac{a}{a^2-bc+1}(a+b+c)+\frac{1}{a^2-bc+1}-1,\quad ⑤$$

$$\frac{bc+ca+ab}{b^2-ca+1}=\frac{b}{b^2-ca+1}(a+b+c)+\frac{1}{b^2-ca+1}-1,\quad ⑥$$

$$\frac{ca+ab+bc}{c^2-ab+1}=\frac{c}{c^2-ab+1}(a+b+c)+\frac{1}{c^2-ab+1}-1\quad ⑦$$

由①~⑦式,可得

$$\frac{N}{3}=M(a+b+c)+N-3$$

$$\frac{2N}{3}=3-M(a+b+c)\leqslant3-\frac{a+b+c}{a+b+c}=2.$$

故 $N\leqslant3$. 这就是要证的结论.

习题精选 3

1. 解 令 $x=\sin\theta,\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

则 $y=\frac{2x+2x^2}{x(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{2(1+x)}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{2(1+\sin\theta)}{1+\cos\theta}$.

由于 $\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta-(-1)}{\cos\theta-(-1)}$ 表示单位圆(y轴右边的半圆且除去与x轴的交点)上的点与定点$(-1,-1)$的斜率.根据图象可得 $\frac{1+\sin\theta}{1+\cos\theta}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right]$,因此,原函数的值域为$[0,1)\cup(1,4]$.

2. 证明 令 $a_0=\tan\frac{\pi}{4}$,$a_n=\tan b_n$,则 $\tan b_n=\frac{\sqrt{1+\tan^2 b_{n-1}}-1}{\tan b_{n-1}}=\frac{1-\cos b_{n-1}}{\sin b_{n-1}}=\tan\frac{b_{n-1}}{2}$

$\therefore a_n=\tan b_n=\tan\frac{b_0}{2^n}=\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}$,注意到"当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时,有 $\tan x>x$" 故 $a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$



3. **解** 设 $a=\tan\alpha$，$b=\tan\beta$，$c=\tan\gamma$，$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则由 $abc+a+c=b$

得 $b=\frac{a+c}{1-ac}$，即 $\tan\beta=\tan(\alpha+\gamma)$，则有 $\beta=\alpha+\gamma$.

故 $p=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}=2\cos^2\alpha-2\cos^2(\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma$

$=\cos2\alpha+1-\cos(2\alpha+2\gamma)-1+3\cos^2\gamma$

$=2\sin\gamma\sin(2\alpha+\gamma)+3\cos^2\gamma\leqslant2\sin\gamma+3\cos^2\gamma$

$=3-3\sin^2\gamma+2\sin\gamma=-3\left(\sin\gamma-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{10}{3}\leqslant\frac{10}{3}$.

故当 $2\alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$，$\sin\gamma=\frac{1}{3}$，即 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时 p 取得最大值 $\frac{10}{3}$.

4. **解** 设 $b_n=\sqrt{1+24a_n}$，则 $b_1=5$，$b_n^2=1+24a_n$，将 $a_n=\frac{b_n^2-1}{24}$ 代入原式，得 $\frac{b_{n+1}^2-1}{24}=$ $\frac{1}{16}\left(1+4\cdot\frac{b_n^2-1}{24}+b_n\right)$，即 $(2b_{n+1})^2=(b_n+3)^2$，$\because b_n>0$，$\therefore 2b_{n+1}=b_n+3$，由待定系数法解得 $b_n=3+4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore a_n=\frac{b_n^2-1}{24}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

5. **解** 设 $p-a=x$，$p-b=y$，$p-c=z$，其中 $p=\frac{a+b+c}{2}$，则 $x,y,z>0$，且 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$.

记△ABC 的面积为 S，于是有 $\frac{R}{2r}=\frac{abc\cdot p}{8S^2}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}$，

$$4a^2-(b-c)^2=(3y+z)(3z+y),$$
$$4b^2-(c-a)^2=(3z+x)(3x+z),$$
$$4c^2-(a-b)^2=(3x+y)(3y+x).$$

故只须证

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz}\geqslant\frac{64(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}{(3x+y)^2(3y+x)^2(3y+z)^2(3z+y)^2(3x+z)^2(3z+x)^2}$$

即 $(3x+y)^2(3y+x)^2(3y+z)^2(3z+y)^2\cdot$

$(3x+z)^2(3z+x)^2\geqslant32xyz(x+y)^3(y+z)^3(z+x)^3$ ①

由算术—几何平均不等式得 $(3x+y)(3y+x)=3x^2+3y^2+10xy=(x+y)^2+(x+y)^2+(x+y)^2+4xy\geqslant4\sqrt[4]{(x+y)^6\cdot4xy}$

由此得 $(3x+y)^2(3y+x)^2\geqslant32\sqrt{xy}(x+y)^3$

同理可得 $(3y+z)^2(3z+y)^2\geqslant32\sqrt{yz}(y+z)^3$，$(3x+z)^2(3z+x)^2\geqslant32\sqrt{zx}(z+x)^3$

以上三式相乘即得式①. 因此，所证不等式成立.



6. 证明　设 α,β,γ 都是锐角，则 $0<\cos^2\alpha,\cos^2\beta,\cos^2\gamma<1$，

且 $\frac{1}{\cos^2\alpha}>1,\frac{1}{\cos^2\beta}>1,\frac{1}{\cos^2\gamma}>1$.

作三角代换 $x=\frac{1}{\cos^2\alpha},y=\frac{1}{\cos^2\beta},z=\frac{1}{\cos^2\gamma}$.

则条件式简化为 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$，即 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$　①

待证的不等式变形为

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\beta}-1}+\sqrt{\frac{1}{\cos^2\gamma}-1},$$

即 $\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}\geqslant\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$　②

注意到式①，对式②用柯西不等式有

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\leqslant\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}},$$　③

当且仅当 $\sin\alpha:\cos\alpha=\sin\beta:\cos\beta=\sin\gamma:\cos\gamma$，即 $\alpha=\beta=\gamma$ 时，式③等号成立.

故式②成立. 所以，原不等式得证.

注　此题也可以作三角代换 $x=\frac{1}{\sin^2\alpha},y=\frac{1}{\sin^2\beta},z=\frac{1}{\sin^2\gamma}$.

7. 解　设 $\tan A=x,\tan B=y,\tan C=z$，其中 $\angle A,\angle B,\angle C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$\tan A\cdot\tan B+\tan B\cdot\tan C+\tan C\cdot\tan A=1$

$\Rightarrow 1-\tan A\cdot\tan B=\tan C(\tan A+\tan B)\Leftrightarrow\cot C=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}=\tan(A+B)$

所以 $\angle A+\angle B+\angle C=\frac{\pi}{2}$.

故 $(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2=2(x+y+z)+2\sum\sqrt{xy+yz+zx+x^2}$

$=2\sum\tan A+2\sum\sqrt{1+\tan^2A}=2\left(\sum\tan A+\sum\sec A\right)$

又因 $y=\tan x$ 的二阶导数 $y''=\frac{2\sin x}{\cos^3x}$，$y=\sec x$ 的二阶导数 $y''=\frac{1+\sin^2x}{\cos^3x}>0$，所以 $(\sqrt{x+y}$ $+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2\geqslant6\left(\tan\frac{A+B+C}{3}+\sec\frac{A+B+C}{3}\right)=6\sqrt{3}$.

注意到 $\frac{27}{4}(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})^2$

$\Leftrightarrow\frac{27}{4}\prod\sec A\geqslant2\left(\sum\tan A+\sum\sec A\right)\Leftrightarrow\frac{27}{8}\geqslant\sum\cos A\cdot\cos B\cdot\sin C+\sum\cos A\cdot\cos B$



$= \frac{1}{2}\sum\cos A\cdot\sin(B+C)+\sum\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}\sum\cos^2 A+\sum\cos A\cdot\cos B=\frac{1}{2}(\sum\cos A)^2$

又因 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为上凸函数，所以 $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant 3\cos\frac{A+B+C}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

从而，$(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leqslant\frac{27}{4}$，因此，原不等式成立。

8. 证明 令 $x=\frac{1}{\alpha}$，$y=\frac{1}{\beta}$，$z=\frac{1}{\gamma}$，则 $\alpha+\beta+\gamma=1$

原不等式等价于 $\sum\sqrt{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta\gamma}}\geqslant\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta\gamma}}+\sum\sqrt{\frac{1}{\alpha}}$，

即 $\sum\sqrt{\alpha+\beta\gamma}\geqslant\sum\sqrt{\alpha}+\sum\sqrt{\beta\gamma}$，即 $\sum\sqrt{\alpha\cdot\sum\alpha+\beta\gamma}\geqslant\sum\sqrt{\alpha^2}+\sum\sqrt{\beta\gamma}$，

即 $\sum\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\geqslant\sum(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta\gamma})$。

又不难证明 $\sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}\geqslant\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta\gamma}$ 故原不等式成立。

9. 证明 令 $a=y+z-x$，$b=z+x-y$，$c=x+y-z$，则 $x=\frac{b+c}{2}$，$y=\frac{a+c}{2}$，$z=\frac{a+b}{2}$

于是原不等式等价于 $\frac{1}{2}\sum a^2(b+c)\geqslant\frac{2(a+b)(b+c)(c+a)}{8}\cdot\sum\frac{\frac{b+c}{2}}{a+\frac{b+c}{2}}$，

即 $2[a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)]\geqslant(a+b)(b+c)(c+a)\cdot\sum\frac{b+c}{2a+b+c}$，

下面我们证明 $a^2(b+c)+b^2(c+a)\geqslant(a+b)(b+c)(c+a)\cdot\frac{a+b}{2c+a+b}$ ①

注意到 ① 等价于 $\frac{a^2}{a+c}+\frac{b^2}{b+c}\geqslant\frac{(a+b)^2}{a+b+2c}$，

由 Cauchy 不等式，这是显然的

同理还有类似 ① 的其他两式，相加即知原不等式成立

10 证明 令 $m_i^2=\tan^2\alpha_i$，$\alpha_i\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

由已知条件应有 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_n=1$，

于是 $\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cdots+\cos^2\alpha_{n-1}=1-\cos^2\alpha_n=\sin^2\alpha_n$，

$\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_3+\cdots+\cos^2\alpha_{n-1}+\cos^2\alpha_n=\sin^2\alpha_2$，$\cdots$

$\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3+\cdots+\cos^2\alpha_n=\sin^2\alpha_1$

把以上诸等式和用均值不等式，得

$(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_{n-1}}\leqslant\sin^2\alpha_n$，

$(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_{n-2}\cos^2\alpha_n}\leqslant\sin^2\alpha_{n-1}$，

$\cdots$

$(n-1)\sqrt[n-1]{\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3\cdots\cos^2\alpha_n}\leqslant\sin^2\alpha_1$



再把上述 n 个不等式两边相乘，得

$$(n-1)^{n}\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cdots\cos^2\alpha_n \leqslant \sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\cdots\sin^2\alpha_n,$$

即 $\tan^2\alpha_1\tan^2\alpha_2\cdots\tan^2\alpha_n \geqslant (n-1)^n$.

由于 $m_i^k=\tan\alpha_i$，$i=1,2,\cdots,n$，故 $m_1m_2\cdots m_n\geqslant(n-1)^{\frac{n}{2k}}$.

11. 解　令 $x_3=\frac{1}{2}(x_1+x_2)+t\ (t>0)$.

由韦达定理可知 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{-2(x_1+x_2+x_3)^3+27x_1x_2x_3+9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{\lambda^3}$

$$=\frac{(x_1+x_2-2x_3)(x_2+x_3-2x_1)(x_3+x_1-2x_2)}{\lambda^3}\quad ①$$

（上面两式分子中把 x_1 换成 $\frac{x_2+x_3}{2}$ 时都为0，由对称性知上式成立）

$$=\frac{t(2t+3\lambda)(3\lambda-2t)}{2\lambda^3}\ (\text{①式代入求得})$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{t^2(9\lambda^2-4t^2)^2}}{2\lambda^3}=\frac{\sqrt{8t^2(9\lambda^2-4t^2)(9\lambda^2-4t^2)}}{4\sqrt{2}\lambda^3}$$

$$\leqslant\frac{1}{4\sqrt{2}\lambda^3}\sqrt{\left(\frac{18\lambda^2}{3}\right)^3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$，当 $a=c=\sqrt{3}$，$b=-1$ 时取等号.

12. 证明　因为原式左边 $=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\sqrt{\frac{2a}{b+c}}+\sqrt{\frac{2b}{c+a}}+\sqrt{\frac{2c}{a+b}}+\frac{3}{2}$

$$\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{4a}{2a+b+c}+\frac{4b}{2b+c+a}+\frac{4c}{2c+a+b}+\frac{3}{2}$$

令 $b+c=x$，$c+a=y$，$a+b=z$，所以

上式右边 $=\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z}+\frac{2y+2z-2x}{y+z}+\frac{2z+2x-2y}{z+x}+\frac{2x+2y-2z}{x+y}+\frac{3}{2}$

$$=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}-\frac{2x}{y+z}-\frac{2y}{z+x}-\frac{2z}{x+y}+6$$

$$=x\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z}\right)+y\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{2x}\right)+z\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)-\frac{2x}{y+z}-\frac{2y}{z+x}-\frac{2z}{x+y}+6$$

$$=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{4}{y+z}\right)+\frac{y}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{4}{z+x}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}\right)+6\geqslant 6$$

当且仅当 $x=y=z$，即 $a=b=c$ 时，等号成立.

13. 解　令 $x_i=\tan^2\theta_i$，$s=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_i}$，$t=\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\theta_i$.

(1) 式左边 $=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)\left(\sum\cos\theta_i\right)=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_i}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\tan^2\theta_i}{\frac{1}{\cos\theta_i}}\right]\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_i}-\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\cos\theta_i}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i\right)=\left(s-\frac{t^2}{s}\right)t=(s^2-t^2)\frac{t}{s}$$

故只须证明 $(s^2-t^2)\frac{t}{s}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n+1}}$. (2)

由 Cauchy 不等式得

$$(n+1)(1+\tan^2\theta_{n+1})=(n+1)\left(2\tan\theta_{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\tan^2\theta_i\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i+\tan\theta_{n+1}\right)^2\Rightarrow\frac{1}{\cos\theta_{n+1}}$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\theta_i+\tan\theta_{n+1}\right)\Rightarrow s\geqslant\sqrt{n+1}\,t \quad (3)$$

又 $(s^2-t^2)\frac{t}{s}=st-\frac{t^3}{s}$ 是关于 s 单调增的，且

$$s=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\tan^2\theta_i}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(1+\tan^2\theta_i)\right]^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}=\sqrt{n(n+1)}$$

所以 $(s^2-t^2)\frac{t}{s}\leqslant\sqrt{n(n+1)}\,t-\frac{t^3}{\sqrt{n(n+1)}}$

下只须证明 $n(n+1)t-t^3\leqslant n^2\sqrt{n}\Leftrightarrow(t-\sqrt{n})(t^2+\sqrt{n}t-n^2)\geqslant0$. (4)

而由(3)知 $$t\leqslant\frac{s}{\sqrt{n+1}}\leqslant\sqrt{n}$$

要证(4)只须证 $t^2+\sqrt{n}t-n^2\leqslant0$. 事实上，$t^2+\sqrt{n}t\leqslant n+n=2n\leqslant n^2$.

14. 证明 对分式中的分母进行如下代换：$\begin{cases}x=b+2c+3d,\\ y=c+2d+3a,\\ z=d+2a+3b,\\ w=a+2b+3c\end{cases}$

将 a,b,c,d 看作变量，解方程组得

$$a=-\frac{5}{24}x+\frac{7}{24}y+\frac{1}{24}z+\frac{1}{24}w,$$

$$b=\frac{1}{24}x-\frac{5}{24}y+\frac{7}{24}z+\frac{1}{24}w$$

$$c=\frac{1}{24}x+\frac{1}{24}y-\frac{5}{24}z+\frac{7}{24}w$$

$$d=\frac{7}{24}x+\frac{1}{24}y+\frac{1}{24}z-\frac{5}{24}w$$

设原不等式左端为 M，将以上四式代入有

$$M=\frac{\frac{7}{24}y+\frac{1}{24}z+\frac{1}{24}w}{x}-\frac{5}{24}+\frac{\frac{1}{24}x+\frac{7}{24}z+\frac{1}{24}w}{y}-\frac{5}{24}+\frac{\frac{1}{24}x+\frac{1}{24}y+\frac{7}{24}w}{z}-\frac{5}{24}+$$

$$\frac{\frac{7}{24}x+\frac{1}{24}y+\frac{1}{24}z}{w}-\frac{5}{24}$$

$$=\frac{7}{24}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{w}{z}+\frac{x}{w}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{z}{x}+\frac{w}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{w}\right)+\frac{1}{24}\left(\frac{w}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{w}\right)-\frac{5}{6}$$



$$\geqslant \frac{7\times 4}{24}\sqrt[4]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{u}{z}\cdot\frac{x}{u}}+\frac{4}{24}\sqrt[4]{\frac{z}{x}\cdot\frac{u}{y}\cdot\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{u}}+\frac{4}{24}\sqrt[4]{\frac{u}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{u}}-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{7}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$$

当且仅当 $x=y=z=u$ 时,上式等号成立.所以,原不等式得证.

习题精选 4

1. 提示 应用数学归纳法证明加强命题 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{7}{10}-\frac{1}{4n+1}$.

2. 提示 运用数学归纳法证明加强命题 $a_n\geqslant n\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\cdots+\frac{a}{n}\right)+\frac{1}{n}$.

3. 提示:运用放缩法证明加强命题 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+2)!+(k+1)!+k!}<\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}$.

4. 提示:运用数学归纳法证明加强命题 $0<a_n<\frac{1}{n}$.

5. 提示:借助 Abel 分部求和公式证明加强命题 $\frac{2n+1}{3}\sqrt{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant\left(\frac{4n+3}{6}\right)\sqrt{n}-\frac{1}{6}$.

6. 提示:利用放缩法证明加强命题 $\sum\frac{1}{(\sqrt{i}+\sqrt{i-1})}\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2$,为此可令 $b_k=\sum_{i=1}^{k}a_i-\sqrt{k}\geqslant 0$,

则 $a_k=b_k-b_{k-1}+\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ $(k\geqslant 2)$,代入展开再放缩可得.

7. 证明 首先把所证命题加强为如下形式:$n(n\geqslant 2)$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1$,

$\sum_{i=1}^{n}x_i=0$,则 $\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$,用数学归纳法证明:

(1) 当 $n=2$ 时,$|x_1|+|x_2|=1$,$x_1+x_2=0$,则 $|x_1|=|x_2|\leqslant\frac{1}{2}$,

$\left|x_1+\frac{x_2}{2}\right|=\left|x_1-\frac{x_1}{2}\right|=\frac{1}{2}|x_1|\leqslant\frac{1}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 2}$,不等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时不等式成立,即对 $k(k\geqslant 2)$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,满足 $\sum_{i=1}^{k}|x_i|\leqslant 1$,$\sum_{i=1}^{k}x_i=0$,则有 $\left|\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}$.

于是 $n=k+1$ 时,$k+1$ 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$,满足

$\sum_{i=1}^{k+1}|x_i|=1$,$\sum_{i=1}^{k+1}x_i=0$,则有(将 x_k+x_{k+1} 看成 $n=k$ 时 x_k):

$\sum_{i=1}^{k-1}|x_i|+|x_k+x_{k+1}|\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}|x_i|\leqslant 1$,$\sum_{i=1}^{k-1}x_i+(x_k+x_{k+1})=\sum_{i=1}^{k+1}x_i=0$.

由条件又有 $|x_{k+1}|\leqslant\frac{1}{2}$,事实上,由 $x_{k+1}=-\sum_{i=1}^{k}x_i$ 得



(2) $x_{k+1} = |x_k + \sum_{i} x_i| \leqslant x_{k+}$ ... $\sum_{i}^{k} |x_i| = \sum |x_i| \leqslant 1$

$$\left|\sum_{i}^{k} \frac{x_i}{i}\right| = \left|\left(\sum^{k} \frac{x_i}{i} - \frac{x_1}{k} - \frac{x_k}{k}\right) + \left(\frac{x_k}{k} - \frac{x_k}{k+1}\right)\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{i}^{k} \frac{x_i}{i} + \frac{x_1 + x_k}{k}\right| + \left|\frac{x_k}{k} - \frac{x_{k+1}}{k+1}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)|x_{k+1}| \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$$

于是 $n = k+1$ 时不等式也成立. 由(1)(2)知原不等式对一切 $n \geqslant 2(n \in \mathbf{N}^*)$ 均成立.

注 本命题可推广为: 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数, 且 $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, 记 $a = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i, a_n = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$, 则 $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{1}{2}(a_1 - a_n)$.

8. 证明 证明加强命题"a_n 都不是3的倍数". 设 m 是使 a_m 为3的倍数的最小下标. 若 $a_m = 5a_{m-1} - 3a_{m-2}$,

则 a_{m-1} 是3的倍数, 矛盾. 故必有 $a_m = a_{m-1} - a_{m-2}$.

知 $a_1, \cdots, a_{m-1}$ 均为奇数, 若 a_{m-1} 为奇数, 则 a_m 为偶数.

从而有 $a_m = a_{m-1} - a_{m-2} = 5a_{m-2} - 3a_{m-3} - a_{m-2} = 4a_{m-2} - 3a_{m-3}$.

故 a_{m-2} 是3的倍数, 矛盾. 因此 a_n 都不是3的倍数, 从而 $a_n \neq 0$.

9. 证明 先用数学归纳法证明以下加强命题: 如果 $x_i \in [0, \pi], i = 1, 2, \cdots, n$, 求证: $\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leqslant n \sin \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$. (1) 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立.

(2) 假设 $n = k$ 时, 命题是真的, 则 $n = k + 1$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \sin x_i = \sum_{i=1}^{k} \sin x_i + \sin x_{k+1} \leqslant k \sin \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} + \sin x_{k+1}$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{k+1} \sin \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} + \frac{1}{k+1} \sin x_{k+1}\right) \leqslant (k+1)\left[\sin \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k+1} + \frac{1}{k+1} \sin x_{k+1}\right]$$

$$\leqslant (k+1) \sin \frac{\sum_{i=1}^{k+1} x_i}{k+1}$$

上述过程应用了琴生不等式($y = \sin x (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 上凸).

根据(1)(2)知加强命题成立, 则当 $\sum x_i = \pi$ 时, 原不等式也成立.

10. 证明 可算得 $x = \frac{2003 x_1^2 + 2004}{2004} = x_1 - 1 + \frac{x_1^2}{2004}$ [illegible], 因为数列所有项有整数, 因此, 2004 x_1^2



1. 注意到 $2004 = 2^2 \times 3 \times 167$，故 x_1 [illegible]，故 x_1 必为奇数，设 $x_1 = 2b + 1$，则 $x_1^2 - 1 = 4b(b+1)$，从而可得 $167 \mid b(b+1)$，如果 $b > 0$，则 $167 \mid b$ 或 $167 \mid b+1$，且 $b \geqslant 167$，因此 $x_1 \geqslant 2 \times 167 + 1 = 335$。但这与题设 $x_1 < 204$ 矛盾，因此，$b = 0$，$x_1 = 1$，由此可算得 $x_2 = 2$，$x_3 = 3$，故下只要用数学归纳法证明原命题的加强命题 $a_n = n$ 即可。

习题精选 5

1. 证明 不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$，则 $A(a) = G(a)$。若 $a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 不全相等，则 $a_1 < a_n$，令 $b_j = a_j (j = 2, 3, \cdots, n-1)$，$b_1 = A(a)$，$b_n = a_1 + a_n - A(a)$，则 $a_1 < b_1 < a_n$，$a_1 < b_n < a_n$，$a_1 + a_n = b_1 + b_n$，$b_1 b_n - a_1 a_n = b_1 b_n - a_1(b_1 + b_n - a_1) = (b_1 - a_1)(b_n - a_1) > 0$。

于是 $A(b) = A(a)$，$G(b) > G(a)$，且 $b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有一个数为 $A(a)$。

若 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 这 $(n-1)$ 个数都相等，显然命题成立，否则仍不妨设 [illegible]，再令 $c_1 = b_1 = A(a) = A(b)$，$c_2 = A(b)$，$c_n = (b_2 + b_n) - A(b)$，$c_k = b_k (k = 3, 4, \cdots, n-1)$，

又可得 $A(c) = A(b)$，$G(c) > G(b)$，且 $c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中至少有二个数为 $A(b)$，这样的调整至多重复 $n-1$ 次，最终必将出现新数组中各正数均相等。假定第 k 次时新数组中各数相等，那么 $A(a) = A(b) = \cdots = A(\cdot)$，$G(a) < G(b) < G(c) < \cdots < G(\cdot)$，同时 $A(\cdot) = G(\cdot)$，所以，$A(a) > G(a)$。

从上述证明过程知，当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号。

2. 解 (1) 求乘积 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 的最小值。

设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是满足题中条件的任意一个数组，考虑新数组 $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})$，其中

$$x_1^{(1)} = x_1, \cdots, x_{n-2}^{(1)} = x_{n-2}, \quad x_{n-1}^{(1)} = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2 - \frac{1}{n^2}}, \quad x_n^{(1)} = \frac{1}{n}$$

这个数组显然满足 $x_i^{(1)} \geqslant \frac{1}{n}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(1)})^2 = 1$。

而且因为 $x_{n-1}^2 x_n^2 - (x_{n-1}^{(1)} x_n^{(1)})^2 = x_{n-1}^2 x_n^2 - \left(x_{n-1}^2 + x_n^2 - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2} = \left(x_{n-1}^2 - \frac{1}{n^2}\right)\left(x_n^2 - \frac{1}{n^2}\right) \geqslant 0$

所以 $x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant x_1^{(1)} x_2^{(1)} \cdots x_n^{(1)}$。

其次，设 $x_1^{(2)} = x_1^{(1)}, \cdots, x_{n-3}^{(2)} = x_{n-3}^{(1)}$，

$$x_{n-2}^{(2)} = \sqrt{(x_{n-2}^{(1)})^2 + (x_{n-1}^{(1)})^2 - \frac{1}{n^2}}, \quad x_{n-1}^{(2)} = x_n^{(2)} = \frac{1}{n}$$

同理可得 $x_1^{(1)} x_2^{(1)} \cdots x_n^{(1)} \geqslant x_1^{(2)} x_2^{(2)} \cdots x_n^{(2)}$。

重复这个过程 $n-1$ 次，最后得到数组 $(x_1^{(n-1)}, \cdots, x_n^{(n-1)})$，其中

$$x_1^{(n-1)} = \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n}, \quad x_2^{(n-1)} = \cdots = x_n^{(n-1)} = \frac{1}{n}$$

并且 $x_i^{(n-1)} \geqslant \frac{1}{n}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(n-1)})^2 = 1$，

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant x_1^{(n-1)} x_2^{(n-1)} \cdots x_n^{(n-1)} \geqslant \frac{\sqrt{n^2 - n + 1}}{n^n}$$



也即，对于任意满足条件的数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$都有$x_1x_2\cdots x_n \geqslant \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$.

而且当$x_1 = \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n}, x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$时等式成立，于是最小值等于$\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{n^n}$.

(2) 由均值定理得$x_1^2x_2\cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n}$.

也即当$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$时，$(x_1x_2x_3\cdots x_n)_{\max} = n^{-\frac{n}{2}}$.

3. 证明 记$f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.由对称性，不妨设$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$.先证明$f(0, a+b, c') \leqslant f(a, b, c)$，这里$c' = \frac{1}{a+b}$.即证$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+c'} + \frac{1}{c'} \leqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.由于$c' = \frac{1}{a+b}$，$c = \frac{1-ab}{a+b}$.不难验证上式等价于$(a-b)^2ab \leqslant 2(1-ab)$. $(*)$

注意到$2(1-ab) = 2c(a+b) \geqslant (a+b)^2 \geqslant (a-b)^2 \cdot ab$，$\therefore (*)$成立.故$f(a, b, c) \geqslant f\left(0, a+b, \frac{1}{a+b}\right)$.即$f(a, b, c) \geqslant \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}} + a+b$.

令$t = \frac{1}{a+b} + a+b$，则$t \geqslant 2$.据函数$g(t) = t + \frac{1}{t}$在$t \geqslant 2$上是增函数，$\therefore$当$t \geqslant 2$时$g(t) \geqslant g(2) = \frac{5}{2}$.即$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b+\frac{1}{a+b}} + a+b \geqslant \frac{5}{2}$，$\therefore f(a, b, c) \geqslant \frac{5}{2}$.

4. 证明 由$f(1) = 1$.若$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$，则不等式显然成立.若$x_1, x_2, \cdots, x_n$不全相等时，则其中必有$x_i > 1, x_j < 1$.由对称性可设$i = 1, j = 2$，则

$$f(x_1)f(x_2) = (ax_1^2 + bx_1 + c)(ax_2^2 + bx_2 + c)$$
$$= a^2x_1^2x_2^2 + b^2x_1x_2 + c^2 + ab(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + ac(x_1^2 + x_2^2) + bc(x_1 + x_2). \quad ①$$
$$f(1)f(x_1x_2) = (a+b+c)(ax_1^2x_2^2 + bx_1x_2 + c)$$
$$= a^2x_1^2x_2^2 + b^2x_1x_2 + c^2 + ab(x_1^2x_2^2 + x_1x_2) + ac(x_1^2x_2^2 + 1) + bc(x_1x_2 + 1). \quad ②$$

①－②得$f(x_1)f(x_2) - f(1)f(x_1x_2) = abx_1x_2(x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1) + ac(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2x_2^2 - 1) + bc(x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1) = -abx_1x_2(x_1-1)(x_2-1) - ac(x_1^2-1)(x_2^2-1) - bc(x_1-1)(x_2-1) > 0$.
由此可见，在变换$x_1' = 1, x_2' = x_1x_2, x_k' = x_k (k = 3, 4, \cdots, n)$之下，有$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) > f(x_1')f(x_2')\cdots f(x_n')$.如果$x_1', x_2', \cdots, x_n'$不全相等，则又可进行类似的调整，而且每次调整都使$x_1, x_2, \cdots, x_n$中等于1的个数至少增加一个.所以，至多进行$n-1$次调整，必可化为$x_1, x_2, \cdots, x_n$全相等的情形，从而有$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \geqslant [f(1)]^n = 1$.

5. 解 若$x_1, x_2, \cdots, x_n$全为0时，c为任意实数.

若$x_1, x_2, \cdots, x_n$至少有一个正数.不妨设$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$.由于不等式是齐次不等式，所以可设$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.令$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j(x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i^4$.不等式化为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$



$\leqslant c$. 假设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中最后一个正数为 $x_{k+1}(k \geqslant 2)$. 将 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, 0, \cdots, 0)$ 调整为 $x'=(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_k+x_{k+1}, 0, \cdots, 0)$, 则有 $F(x')-F(x)=x_k x_{k+1}\{(x_k+x_{k+1})[3-4(x_k+x_{k+1})]+2x_k x_{k+1}\}$.

因 $1 \geqslant x_1+x_k+x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1}=\frac{3}{2}(x_k+x_{k+1})$,

故 $x_k+x_{k+1} \leqslant \frac{2}{3}$, $F(x')-F(x)>0$. 这表明将 x 调整为 x' 后, $F(x)$ 严格递增.

对于 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 经若干次调整后, 最终可得 $F(x) \leqslant F(x_1, x_2, 0, \cdots, 0)=x_1 x_2(x_1^2+x_2^2)=\frac{1}{2}(1-2x_1x_2)\cdot 2x_1x_2 \leqslant \frac{1}{8}$. 因此 $c \geqslant \frac{1}{8}$. 综上所述, $c_{\min}=\frac{1}{8}$.

6. 解 显然 $x=1$ 为原方程的一个自然数根, 由综合除法得 $5x^2-5px+66p-1=0$. ①

即原命题等价于①有两个自然数根, 设为 $u, v(u \leqslant v)$, 则由韦达定理得

$$\begin{cases} u+v=p, & ② \\ uv=\frac{1}{5}(66p-1). & ③ \end{cases}$$

②代入③得 $5uv=66(u+v)-1$. ④

由④可知, u, v 不能被 2, 3, 11 整除. 又由④得 $v=\frac{66u-1}{5u-66}$ ⑤, 而 u, v 为自然数, 由⑤知 $u>\frac{66}{5}$, 即 $u \geqslant 14$, 又 $2 \nmid u$, 且 $3 \nmid u$, 所以 $u \geqslant 17$.

由 $v \geqslant u$ 及⑤可得 $\frac{66u-1}{5u-66} \geqslant u$, 即 $5u^2-132u+1 \leqslant 0$, 于是 $u \leqslant \frac{66+\sqrt{66^2-5}}{5}<\frac{132}{5}$, 所以 $17 \leqslant u \leqslant 26$. 又 $2 \nmid u$, $3 \nmid u$ 可知 u 只能取 17, 19, 23, 25. 经试验只有 $u=17$, $v=59$ 时符合题意, 故 $p=76$.

7. 证明 设 a, b, c 满足已知条件, 则 $0, a+b, c$ 也是满足条件的三个数. 记原不等式左边为 $f(a, b, c)$, 则 $f(a, b, c)-f(0, a+b, c)$

$=[(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2]-[(1-0^2)^2+(1-(a+b)^2)^2+(1-c^2)^2]$

$=4ab\left(1-a^2-b^2-\frac{3}{2}ab\right)=4ab\left(1-(a+b)^2+\frac{1}{2}ab\right) \geqslant 0$.

同理 $f(0, a+b, c) \geqslant f(0, 0, a+b+c)$.

所以 $f(a, b, c) \geqslant f(0, 0, a+b+c)=f(0, 0, 1)=2$. 故原不等式得证.

8. 证明 记不等式左边为 $f(x, y, z)$. 先固定 y, 则 $f(x, y, z)$ 变为二元函数 $g(x, z)=y \cdot \frac{x}{(1+5x)(4x+3y)} \cdot \frac{z}{(5y+6z)(z+18)}$.

而 $\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}=\frac{x}{20x^2+(15y+4)x+3y}=\frac{1}{20x+\frac{3y}{x}+(15y+4)}$

$$\leqslant \frac{1}{2\sqrt{20x \cdot \frac{3y}{x}}+(15y+4)}=\frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2},$$



同理 [illegible]

所以 $g(x, z) \leqslant y \cdot \frac{1}{(\sqrt{15}y + 2)} \cdot \frac{1}{[illegible]}$

现在问题转化为求 $h(y) =$ [illegible] 的最大值

而 $h(y) = \left[\frac{\sqrt{y}}{(\sqrt{15y} + 2)(\sqrt{5y} + 6\sqrt{3})}\right]$ [illegible]

[illegible]

等号当每个平均不等式取到等号时成立，不难解得等号当 $x =$ [illegible]，$y = \frac{12}{[illegible]}$，$z$ [illegible] 6 时取到

9. 证明 首先在 [illegible] 不变的情况下，令 [illegible]，则 [illegible] 故只需证明 [illegible]

相应地题目条件变为 $y \geqslant$ [illegible]

(1) 若 $y \leqslant 4$，则 [illegible] $\geqslant 2$ [illegible] 结论成立

(2) 若 $4 < y \leqslant 6$，则在保持 $x_1 + x_2 + x_3 = x$ 不变的情况下，令 [illegible] 此时 [illegible] 变小 故只需证明 [illegible] 事实 [illegible]

[illegible] 保持 [illegible] 不变 若这两个和均大于等于 [illegible] 2 则取 [illegible] 若这两个和中只有一个不小于 [illegible] 不妨设 [illegible] 2 则取 [illegible] 2 再在和 [illegible] 不变的情况下，取 [illegible] 否则取 [illegible] 2，在和 [illegible] 不变的情况下，令其一较大者为 [illegible] 总之 [illegible]

$\geqslant 2^2 y(y - 4) = 4y^2 - 16y \geqslant y$

10. 解 设实数 [illegible] 满足题设条件，且存在 x_i 和 x_j，使得 $\sqrt{3} > x_i \geqslant x_j > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

则记 $m = \frac{1}{2}(x_i + x_j)$，$h = \frac{1}{2}(x_i - x_j) = x_i - m = m - x_j$

由于 [illegible] 随着 h [illegible] 0 的增大而增大，因此，当取 $h =$ [illegible] 并用 [illegible] 代替 x_i 和 x_j 时，诸变元之和不变，而诸变元之值的 12 次方幂之和增大

所以，所求的 12 次方幂和的最大值只能在以下情形达到：诸变元 [illegible] 中至多只有一个取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$，而其余变元取值为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 [illegible]

设 u 个变元取值 [illegible] 个变元取值 [illegible] $w = 0$ 或 [illegible] 个变元取值于 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right)$，如果 $w = 1$，则该值记为 t，则 $\begin{cases} u + v + w = 1997, \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}u + \sqrt{3}v + tw = [illegible] \end{cases}$ 由此得 [illegible]



因为 $\sqrt{3}(t+1)w=1043$ [illegible] $4v$ 和 v 是整数，所以 $w=1$，因此，$\frac{1}{\sqrt{3}}<t$ [illegible] $\frac{1}{\sqrt{3}}(1042$ [illegible] $4v)<\sqrt{3}$，

由此解得 $v=260$，$t=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$u=1736$，于是所求的最大值为

[illegible] $=189.48$.

习题精选 6

1. 证明 [illegible] $=4$

因此，[illegible]

2. 证明 [illegible] $(n\geq 2)$

因此，[illegible] 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列

[illegible] $=2+(n-1)\cdot 2=2n$，$\therefore S_n=\frac{1}{2n}$，当 $n\geq 2$ 时，[illegible]

当 $n=1$ 时，[illegible] 故 [illegible] $(n\geq 2)$

$b_n=2(1-n)a_n$ [illegible]

因此 [illegible]

[illegible]

3. 解 因为 [illegible] $n\in\mathbf{N}$，所以 [illegible]

所以 $b_n=\frac{1}{1+a_n}=$ [illegible] $P_n=b_1b_2\cdots b_n=$ [illegible]

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=$ [illegible]

故 $2P_n+S_n=$ [illegible] 2

4. 解 [illegible] 因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)$ [illegible] 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$，即 $f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，



又 $a_n = f(1) + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) + f(0)$.

两式相加 $2a_n = [f(0) + f(1)] + \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] + \cdots + [f(1) + f(0)] = \frac{n+1}{2}$

所以 $a_n = \frac{n+1}{4}$，$n \in \mathbf{N}$，又 $a_{n+1} - a_n = \frac{n+1+1}{4} - \frac{n+1}{4} = \frac{1}{4}$，故数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

(2) $b_n = \frac{4}{4a_n - 1} = \frac{4}{n}$，$T_n = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 = 16\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$

$\leqslant 16\left[1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}\right]$

$= 16\left[1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right] = 16\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 32 - \frac{16}{n} = S_n$，所以 $T_n \leqslant S_n$

5. **解** (1) 设 $f(x) = kx + b(k \neq 0)$，$\therefore f[f(1)] = k^2 + kb + b = [illegible]$ 因为 $f(x)$ 的图像关于直线 $x - y = 0$ 的对称为 C，$\therefore$ 曲线 C 为 $f^{-1}(x) = \frac{x}{k} - \frac{b}{k}$，$\therefore f^{-1}(n) = \frac{n}{k} - \frac{b}{k}$，$f^{-1}(n-1) = \frac{n-1}{k} - \frac{b}{k}$，$f^{-1}(n) - f^{-1}(n-1) = \frac{1}{k}$，又点 $\left(n, \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)(n \in \mathbf{N}^*)$ 在曲线 C 上，

$f^{-1}(n) = \frac{a_n}{a_{n-1}}$，$f^{-1}(n-1) = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$，$\therefore f^{-1}(n) - f^{-1}(n-1) = \frac{a_n}{a_{n-1}} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = 1$，得 $k = 1$，$b = [illegible]$。

因此，$f(x) = x - 1$，曲线 C：$y = x + 1$

(2) 由 $f^{-1}(n) = \frac{a_n}{a_{n-1}} = n + 1$ [illegible] $\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 = n!$

由 $a_1 = 1$，得 $a_n = n!$，又 $\frac{a_n}{(n+2)!} = \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

故 $S_n = \frac{a_1}{3!} + \frac{a_2}{4!} + \frac{a_3}{5!} + \cdots + \frac{a_n}{(n+2)!} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$，又 [illegible] $\frac{1}{n+2} \leqslant \frac{1}{3}$，$\frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{2}$，故 S_n 的最小值为 $\frac{1}{6}$

因此，$m < \frac{1}{6}$，自然数 m 的最大值是 0

6. **解** 利用均值不等式 $x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{2(t+1)^5} + \frac{a}{2(t+1)^5} \geqslant 7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}}$，当 $(t+1)^2 = \frac{a}{2(t+1)^5}$ 时等号成立，于是有 $7\sqrt[7]{\frac{a^2}{4}} \geqslant 24 \Rightarrow a \geqslant 2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$，另一方面，当 $a = 2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$，$t = \sqrt{\frac{24}{7}} - 1$ 时，$x(t) = 24$，从而 a 的最大值为 $2\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^7}$

7. **解** 根据递推关系式，运用迭代法求出通项，由通项放缩比得

由原式得 $a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2$，采用迭代法，有

$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^2 = [(a_{n-1} - 1)^2]^2 = \cdots = (a_1 - 1)^{2^n} = 2^{2^n}$



因此，$a_n = 2^{2^{n-1}} + 1$，从而有 $\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdots (2^{2^{n-1}} + 1)$

$= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1) = \cdots = 2^{2^n} - 1 < 2^{2^n}$.

8. 解 记 $A = \left(\frac{1}{P_1+P_2} + \frac{1}{P_2+P_3} + \cdots + \frac{1}{P_{n-1}+P_n} + \frac{1}{P_n+P_1}\right)$，

$B = (P_1+P_2) + (P_2+P_3) + \cdots + (P_{n-1}+P_n)$，则 $A \cdot B > (n-1)^2$，($P_1+P_2 \neq P_2+P_3$)，故等号不成立，而 $B = 2(P_1+P_2+\cdots+P_n) - P_1 - P_n \leqslant 2(1+2+\cdots+n) - 1 - 2 = n^2+n-3$

因此，$A > \frac{(n-1)^2}{B} > \frac{(n-1)^2}{n^2+n-3} > \frac{(n-1)^2}{n^2+n-2} = \frac{n-1}{n+2}$

9. 证明 $\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} + \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) \leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$

因此，$b_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < \frac{2}{\sqrt{a_0}} = 2$，而 $b_n > 0$ 显然成立，故 $0 < b_n < 2$

10. 证明 改为证：$(a_1 - a_{n+1})\left[\frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_2-a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right] > 1$，令 $a_k - a_{k+1}$，则 $a_1 - a_{n+1} = (a_1-a_2) + (a_2-a_3) + \cdots + (a_n-a_{n+1})$ 于是

$[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})]\left(\frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_2-a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right) \geqslant n^2 > 1$

即 $(a_1 - a_{n+1})\left(\frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_2-a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n-a_{n+1}}\right) > 1$

$\therefore \frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_2-a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n-a_{n+1}} > \frac{1}{a_1-a_{n+1}}$，

故 $\frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_2-a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n-a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}-a_1} > 0$

11. 证明 (1) 对任意实数 m，有

$$f(m) + f(-m) = \frac{2^m}{2^m+1} + \frac{2^{-m}}{2^{-m}+1} = \frac{2^m}{2^m+1} + \frac{1}{2^m+1} = 1.$$ ①

(2) 对 $m \geqslant 0, n \geqslant 0$，有 $2^{m+n} + 2^{-m} \cdots$ $= 2^m(2^n - 1) \geqslant \cdots$

即对 $m \geqslant 0, n \geqslant 0$，有 $2^{m+n} + 2^{-m} \geqslant 2^n + 1$. ②

(3) 令 $k = c - a$，$m = c - b$，$n = k - m = b - a$，根据题意 $k, m, n \geqslant 0$，$f(c-a) - f(c-b) = f(k) - f(m) = \frac{2^k}{2^k+1} - \frac{2^m}{2^m+1} = \frac{2^k - 2^m}{2^{m+k}+2^m+2^k+1} = \frac{2^m(2^{k-m}-1)}{2^{m+k}+2^m+2^k+1} = \frac{2^n-1}{2^{n+k}+2^{-m}+2^n+1}$，

由②得，上式 $\leqslant \frac{2^n-1}{2(2^n+1)} = \frac{2^n}{2^n+1} - \frac{1}{2} = f(b-a) - \frac{1}{2}$.

所以 $f(c-a) \leqslant f(c-b) + f(b-a) - \frac{1}{2}$. ③

结合①、③得 $f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) \leqslant f(a-b) + f(b-c) + f(c-b) + f(b-a) - \frac{1}{2}$



$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

12. 解　原不等式转化为 $(e+e^{-1})(e^2+e^{-2})\cdots(e^n+e^{-n})>(e^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$，$n\in N^*$，

设 $m,n\in N^*$，则 $F(m)F(n)=e^{m+n}+e^{-(m+n)}+e^{m-n}+e^{n-m}>e^{m+n}+e^{-(m+n)}+2>e^{m+n}+2$，

因此 $F(1)F(n)>e^{n+1}+2$，$F(2)F(n-1)>e^{n+1}+2$，…，$F(n)F(1)>e^{n+1}+2$

由此得，$[F(1)F(2)\cdots F(n)]^2=[F(1)F(n)][F(2)F(n-1)]\cdots[F(n)F(1)]>(e^{n+1}+2)^n$，故

$F(1)F(2)\cdots F(n)>(e^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}$，$n\in N^*$

13. 解　(1) 当 $n\geq 2$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=2(a_n-a_{n-1})+2\times(-1)^n$，所以 $a_n=2a_{n-1}+2\times(-1)^{n-1}$，

解法一　$a_n=2a_{n-1}+2\times(-1)^{n-1}$，$a_{n-1}=2a_{n-2}+2\times(-1)^{n-2}$，…，$a_2=2a_1-2$

所以 $a_n=2^{n-1}a_1+2^{n-1}\times(-1)+2^{n-2}\times(-1)^2+\cdots+2\times(-1)^{n-1}$

$=2^{n-1}+(-1)^n[(-2)^{n-1}+(-2)^{n-2}+\cdots+(-2)]$

$=2^{n-1}-(-1)^n\frac{2[1-(-2)^{n-1}]}{3}=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$

经验证 a_1 也满足上式，所以 $a_n=\frac{2}{3}[2^{n-2}+(-1)^{n-1}]$，$n\geq 1$

解法二　$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$，以下用累加恒等式证得

(2) **证明**　由通项公式得 $a_4=2$

当 $n\geq 3$ 且 n 为奇数时，$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2^{n-2}+1}+\frac{1}{2^{n-1}-1}\right]$

$=\frac{3}{2}\times\frac{2^{n-1}+2^{n-2}}{2^{2n-3}+2^{n-1}-2^{n-2}-1}<\frac{3}{2}\times\frac{2^{n-1}+2^{n-2}}{2^{2n-3}}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$。

当 $m>4$ 且 m 为偶数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}=\frac{1}{a_4}+\left(\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{m-1}}+\frac{1}{a_m}\right)<\frac{1}{2}+$

$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{m-2}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2^{m-4}}\right)<\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

当 $m>4$ 且 m 为奇数时，$\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{a_{m+1}}<\frac{7}{8}$

所以对任意整数 $m>4$，有 $\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\cdots+\frac{1}{a_m}<\frac{7}{8}$

14. **证明**　由题设显然有 $f(n)\geq 2$

将 $f(n+1)=(f(n))^2-f(n)+1$ 变形为 $f(n+1)-1=f(n)[f(n)-1]$，则 $\frac{1}{f(n+1)-1}=$

$\frac{1}{f(n)-1}-\frac{1}{f(n)}$

故 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(i)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{f(i)-1}-\frac{1}{f(i+1)-1}\right)=\frac{1}{f(1)-1}-\frac{1}{f(n+1)-1}=1-\frac{1}{f(n+1)-1}$

$f(2)=f(1)[f(1)-1]+1=3$，$f(3)=f(2)[f(2)-1]+1=7$，

由此猜想 $2^{2^{n-1}}<f(n+1)-1<2^{2^n}$　③



用数学归纳法证明式③对 $n\geqslant 2$ 的整数成立.

当 $n=2$ 时, $4<f(3)-1<16$, 式③成立.

假设 $n=m$ 时,式③成立.

当 $n=m+1$ 时,有 $f(m+2)=f(m+1)[f(m+1)-1]+1$. ④

由归纳假设有 $2^{2^{m-1}}<f(m+1)-1<2^{2^m}$.

因为 $f(m+1)$ 是正整数,由上式有 $2^{2^{m-1}}+1\leqslant f(m+1)-1\leqslant 2^{2^m}-1$. ⑤

由式④、式⑤有 $f(m+2)\geqslant(2^{2^{m-1}}+2)(2^{2^{m-1}}+1)+1=2^{2^m}+3\times 2^{2^{m-1}}+3>2^{2^m}+1$. ⑥

又 $f(m+2)\leqslant 2^{2^m}(2^{2^m}-1)+1=2^{2^{m+1}}-2^{2^m}+1<2^{2^{m+1}}+1$. ⑦

由式⑥、式⑦知式③对 $n=m+1$ 成立. 所以,式③对任意正整数 $n\geqslant 2$ 成立. 因此,所证不等式成立.

15. **证明** 由于 $a_n^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,所以 $a_n>0$, $n\in\mathbf{N}^*$. 又

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}\leqslant\frac{a_n^2}{2a_n-a_n}=a_n,$$

所以 $a_{n+1}\leqslant a_n$, $n\in\mathbf{N}^*$, 于是

$$a_n = [illegible]$$

$$= [illegible]$$

$$= -a_n-a_{n-1}+[illegible]=\cdots=-a_n-a_{n-1}-\cdots-a_1+[illegible]$$

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$, $n=1,2,\cdots$.

习题精选 7

1. **证明** (1) 由 Abel 分部求和公式,得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=a_n\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)(a_k-a_{k+1})\leqslant a_n\sum_{k=1}^{n}b_k+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k$$

又由 Cauchy 不等式得 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore\sum_{k=1}^{n}a_k^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}b_k^2$.

(2) 由 Abel 分部求和公式,得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^3=a_n^2\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}a_i\right)(a_k^2-a_{k+1}^2)\leqslant a_n^2\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)(a_k^2-a_{k+1}^2)$$



$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{2}} \cdot a_i^{\frac{3}{2}} b_i \cdots \left(\sum a_i\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^{\frac{1}{2}} \therefore \sum a_i \leqslant \sum a_i b_i^2$$

2. 证明 只需证明左边不等式，为此推广数列$\{b_i\}$，使 $b_{n+i}=b_i(i=1,2,\cdots)$。

注意到$\sum b_{k+i} = \sum b_i$，$\sum_{i=1}^{k} b_i \geqslant \sum b_i$，$a_k - a_{k+1} \leqslant 0(1\leqslant k\leqslant n-1)$，由 Abel 分部求和公式得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\sum a_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} b_{k+j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{k+j}\right)$$

$$= \sum \left[a_n \sum b_{i} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum b_{k+j}\right)(a_k - a_{k+1}) \right] \cdots \sum a_n \sum b_i + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum b_i\right)(a_k - a_{k+1}) \Big] = n \cdot \sum a_i b_i$$

3. 证明 令 $s_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i$，$s'_i = b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$

由题设易知 $s_i \leqslant s'_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$，$s_n = s'_n$

又因为 $a_i - a_{i+1} \leqslant 0$，故 $s_i(a_i - a_{i+1}) \geqslant s'_i(a_i - a_{i+1})$

所以$\sum a_i b_i = \sum s_i(a_i - a_{i+1}) + a_n s_n \geqslant \sum s'_i (a_i - a_{i+1}) + a_n s'_n = \sum a_i b_{ii}$

此即左端不等式，类似可证得右端不等式

4. 证明 利用 Abel 变换法，记 $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$，$i=1,2,\cdots,n$

约定 $s_0 = 0$，则 $2s_i = [illegible] \geqslant i a_i$，则 $s_i \geqslant \frac{i}{2} a_i$

故$\sum \frac{a_i}{i} = \sum s_i \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) + \frac{1}{n} s_n \geqslant \frac{1}{2} [illegible] + \sum \frac{a_i}{2}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) - \frac{1}{n}$

$$[illegible] \sum \frac{a_i}{i+1} + \frac{1}{n} s_n = \frac{1}{2} \sum \frac{a_i}{i} - \frac{1}{n} s_n$$

因此$\sum \frac{a_i}{i} \geqslant \frac{2}{n} s_n = \frac{2}{n}(s_{n-1} + a_n) \geqslant \frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{2} a_n + a_n\right) = \frac{n+1}{n} a_n > a_n$

5. 证明 容易验证当 $n=1$ 时，两个不等式都取等号，下面不妨设 $n\geqslant 2$.

先证左边不等式 令 $a_i = 1$，$b_i = \sqrt{i}(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i = i$.

利用 Abel 分部求和公式，得 $s = \sum \sqrt{i} = \sum a_i b_i = \sum i(\sqrt{i} - \sqrt{i+1}) + n\sqrt{n}$

$$= n\sqrt{n} - \sum \frac{i}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$$

由$\frac{i}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} < \frac{i}{2\sqrt{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{i}$，有$\sum \frac{i}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} < \frac{1}{2} \sum \sqrt{i} = \frac{1}{2}(s - \sqrt{n})$，

所以 $s > n\sqrt{n} - \frac{1}{2}(s - \sqrt{n})$，解之，得 $s > \frac{2n+1}{3} \cdot \sqrt{n}$.

下证右边不等式，令 $a_i = i$，$b_i = \frac{1}{\sqrt{i}}(1\leqslant i\leqslant n)$，则 $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i = \frac{1}{2} i(i+1)$

利用 Abel 分部求和公式，有 $s = \sum \frac{i(i+1)}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$



$= \frac{n+1}{2} \cdot \sqrt{n} + \sum \frac{i(i+1)}{2} \cdot (\sqrt{i} - \sqrt{i+1})$

$= \frac{n+1}{2} \cdot \sqrt{n} + \frac{1}{2} \sum \frac{\sqrt{i+1}}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}}$

因为 $\frac{\sqrt{i(i+1)}}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} < \frac{1}{4}(\sqrt{i} + \sqrt{i+1})(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，故有 $\sum \frac{\sqrt{i(i+1)}}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} < \frac{1}{4} \cdot \sum \sqrt{i}$

$+ \ldots = \frac{1}{4}(\ldots + \sqrt{n})$，于是得到 $\ldots \frac{1}{n} \ldots \frac{n-1}{\ldots} \cdot \sqrt{n}$ 从而 $\frac{n+3}{6} \cdot \sqrt{n} \ldots \frac{1}{6}$

6. 证明 将待证的不等式改写为

$$\sum \frac{\ldots}{1+x_i} \ldots \sum 1 - \sum \frac{x_i}{1+a} \ldots \sum \frac{\ldots}{(1+a)}$$

只需证明对 $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $\frac{1+x_i}{1+x_i} \ldots 1 + \frac{x_i}{\ldots a} \ldots \frac{1}{(1+a)}$

而此式不难通过化简而证得

7. 证明 $\sum a_i b_i = 0 \Leftrightarrow \sum a_i \sum b_i \ldots \sum a_i b_i$

又 $2\sum a_i b_i \ldots \sum b_i \ldots \sum b_i = \frac{\sum a_i b_i}{\sum a_i} \ldots \sum b_i$

$$\frac{(\sum a_i)(\sum b_i)}{\sum a_i} \ldots \sum b_i \ldots \frac{(\sum b_i)}{(\sum a_i)} \mid \sum a_i \ldots \sum a_i \ldots$$

8. 证明 设 $D = (\sum a_i)(\sum b_i) - (\sum (a_i + b_i))\left(\sum \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}\right)$

$$= (\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{j=1}^{n} b_j) - (\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k))\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j b_j}{a_j + b_j}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_k b_j (a_j + b_j) - a_j b_j (a_k + b_k)}{a_j + b_j}. \quad ①$$

将指标 k, j 对换，D 的值不变：$D = \sum \sum \frac{a_j b_k (a_k + b_k) - a_k b_k (a_j + b_j)}{a_k + b_k}$. ②

① ② 两式相加，得 $2D = \sum \sum \frac{(a_k b_j - a_j b_k)^2}{(a_k + b_k)(a_j + b_j)} \geq 0$，$D = 0$ 当且仅当 $a_k b_j = a_j b_k (k, j = 1, 2, \cdots, n)$

9. 证明 令 $y_i = x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_n = x \ldots 2x \ldots (n - i) x_n$，$c = \frac{n(n-1)}{2}$，$z = (n-i) y_i$，则 $\frac{n(n-1)}{2} \sum x_i x_j - (\sum (n-i) x_i)(\sum (j-1) x_j) = c \sum x_i y_i \ldots y \sum (n-i) x = \sum x_i z$



注意到 $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = y$, $\sum_{i=1}^{n-1} i = c$, 故 $\sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0$. 又 $y = x_2 + 2x_3 + \cdots + (n-1)x_n < x_n + 2x_n + \cdots + (n-1)x_n = cx_n$, 故 $z_{n-1} = cy_{n-1} - y = cx_n - y > 0$. 所以至少有一个 $z_i < 0$.

又 $\frac{z_{i+1}}{c(n-i-1)} - \frac{z_i}{c(n-i)} = \frac{y_{i+1}}{n-i-1} - \frac{y_i}{n-i}$, 而 $\frac{y_{i+1}}{n-i-1}$ 是 $x_{i+2}, x_{i+3}, \cdots, x_n$ 的平均值, $\frac{y_i}{n-i}$ 是 $x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n$ 的平均值且 x_i 严格递增, 故 $\frac{z_{i+1}}{c(n-i-1)} > \frac{z_i}{c(n-i)}$. 故必存在某个 k 使 $z_i \leqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$; $z_i > 0$, $i = k+1, \cdots, n$. 因此 $(x_i - x_k)z_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$, 且当 $i = n-1$ 时为正. 所以 $x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_{n-1}z_{n-1} > x_k(z_1 + \cdots + z_{n-1}) = 0$. 结合(*)即证.

10. 解 令 $y_i = \sum_{j=i}^{n} x_j$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 则 $y_1 = n$ 且 $\sum_{i=1}^{n} y_i = 2n-2$. $S = \sum_{k=1}^{n} k^2 x_k = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(y_k - y_{k+1}) + n^2 y_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 y_k - \sum_{k=2}^{n}(k-1)^2 y_k + n^2 y_n = y_1 + \sum_{k=2}^{n-1}(2k-1)y_k - (n-1)^2 y_n + n^2 y_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)y_k$.

注意到, $y_1 = n$, 而 $y_2 \geqslant y_3 \geqslant \cdots \geqslant y_n$. 若存在 $i \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$ 使 $y_i > y_{i+1}$ (且设 i 是使此式成立的最大下标), 则由 S 的表达式中 y_i 的系数小于 $y_{i+1}, \cdots, y_n$ 的系数, 故在保持 $y_i + y_{i+1} + \cdots + y_n$ 不变的前提下, 用它们的算术平均值来代替每个数时, S 变大, 故当 $y_2 = y_3 = \cdots = y_n$ 时, S 最大, 此时 $S_{max} = n + \frac{n-2}{n-1}\sum_{k=2}^{n}(2k-1) = n^2 - 2$.

注: 本题也可令 $y_k = \sum_{i=k}^{n} x_i$, 直接由 Abel 变换, 得 $S = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)y_k$, 此时 $y_1 = n$, $y_2 \geqslant y_3 \geqslant \cdots \geqslant y_n$.

习题精选 8

1. 证明 构造一次函数 $f(x) = (b+c)x + bc + 1$, $-1 < x < 1$, 故只需考虑 $f(1)$ 与 $f(-1)$ 的符号($\because f(x)$ 是一次函数). 易证: $f(-1) = -(b+c) + bc + 1 = (b-1)(c-1) > 0$; $f(1) = (b+c) + bc + 1 = (b+1)(c+1) > 0$. 故当 $-1 < x < 1$ 时 $f(x)$ 恒大于零, 即 $ab + bc + ca + 1 > 0$ $(-1 < a < 1)$.

2. 证明 构造数列 $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1+nx}{(1+x)^n}$, 由于 $a_{n+1} - a_n = \frac{1+(n+1)x}{(1+x)^{n+1}} - \frac{1+nx}{(1+x)^n} = -\frac{nx^2}{(1+x)^{n+1}} < 0$, 故 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 则 $a_n = \frac{1+nx}{(1+x)^n} \leqslant a_1 = 1$, 即证.

3. 证明 当 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 时, 上式显然成立. 当 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ 时, 构造二次函数:

$$f(t) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)t^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)t + (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$$
$$= (x_1t - y_1)^2 + (x_2t - y_2)^2 + (x_3t - y_3)^2 - (t-1)^2.$$

此二次函数开口向下, 又 $f(1) = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \geqslant 0$, 故抛物线必与 x 轴有交点, $\therefore \Delta = 4(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 - 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1) \geqslant 0$.

即 $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 1)^2 \geqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1)$.

4. 证明 设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$，$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$，由于 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，…，$\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$，因此 $A<B$。从而 $A^2<AB=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，故原不等式成立.

5. 证明 设 A、B、C 为相互独立的随机事件，$P(A)=x$，$P(B)=y$，$P(C)=z$.

$A\overline{B}\overline{C}$、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}\overline{B}C$ 为两两互不相容事件，故 $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)=x(1-y)(1-z)+(1-x)y(1-z)+(1-x)(1-y)z$，而 $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)<P(A+B+C)\leqslant 1$.

$\therefore x(1-y)(1-z)+(1-x)y(1-z)+(1-x)(1-y)z<1$.

6. 证明 由题设知：$a^2+b^2+c^2=1-2(ab+bc+ca)$，故原不等式等价于：$\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{4}{27}$；构造一个三次函数：$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-x^2+(ab+bc+ca)x-abc$.

由于 $a+b+c=1$，且 a、b、c 为三角形三边长，故 $0<a,b,c<\frac{1}{2}$，从而 $0<a,b,c<\frac{5}{9}$.

一方面，$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}\right)^3-\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc$.

另一方面，$f\left(\frac{5}{9}\right)=\left(\frac{5}{9}-a\right)\left(\frac{5}{9}-b\right)\left(\frac{5}{9}-c\right)\leqslant\left[\frac{\left(\frac{5}{9}-a\right)+\left(\frac{5}{9}-b\right)+\left(\frac{5}{9}-c\right)}{3}\right]^3=\frac{8}{729}$，故 $\frac{125}{729}-\frac{25}{81}+\frac{5}{9}(ab+bc+ca)-abc\leqslant\frac{8}{729}$，所以 $5(a^2+b^2+c^2)+18abc\geqslant\frac{7}{3}$.

7. 证明 由对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$。由 $(x+y)+z=2\times\frac{1}{2}$，知 $x+y$、$\frac{1}{2}$、z 成等差数列.

故设 $x+y=\frac{1}{2}+d$，$z=\frac{1}{2}-d$。由 $x+y\geqslant 2z$，得 $\frac{1}{6}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}$，则 $xy+yz+zx-2xyz=(x+y)z+xy(1-2z)=\frac{1}{4}-d^2+2dxy\geqslant 0$。当且仅当 $x=1$，$y=z=0$ 时等号成立.

又 $\frac{1}{4}-d^2+2dxy\leqslant\frac{1}{4}-d^2+2d\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-d^2+\frac{1}{2}d\left(\frac{1}{2}+d\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times 2d\left(\frac{1}{2}-d\right)^2$ $\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{2d+\left(\frac{1}{2}-d\right)+\left(\frac{1}{2}-d\right)}{3}\right]^3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$.

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时等号成立。故 $0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

8. 证明 把 a 视为变量，b、c 视为常量，记 $f(a)=abc+2-(a+b+c)=(bc-1)a+2-b-c$，其中 $a\in(-1,1)$。现在，只要根据一次函数的性质，证明 $f(a)>0$ 即可.

因为 $b,c\in(-1,1)$，$bc<1$，所以 $f(a)$ 是减函数.

所以 $f(a)>f(1)=1-b-c+bc=(1-b)(1-c)>0$.

9. 证明 构造向量 $\vec{A}=\left(\frac{a}{\sqrt{b-1}},\frac{b}{\sqrt{c-1}},\frac{c}{\sqrt{a-1}}\right)$，$\vec{B}=(\sqrt{b-1},\sqrt{c-1},\sqrt{a-1})$，由 $|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\geqslant|\vec{A}\cdot\vec{B}|^2$ 及柯西不等式，得 $S(b-1+c-1+a-1)\geqslant(a+b+c)^2$，其中 $S=\frac{a^2}{b-1}+$



$\dfrac{b^2}{c-1}+\dfrac{c^2}{a-1}$，即 $S\geqslant\dfrac{(a+b+c-3+3)^2}{a+b+c-3}=(a+b+c-3)+6+\dfrac{9}{a+b+c-3}\geqslant 6+2\sqrt{9}=12$.

10. 解 观察方程组三个方程的形状特征，启发构造一个三次方程 $t^3+at^2+yt+x=0$，其中 a、b、c 是它的三个根，而 a、b、c 又是方程 $(t-a)(t-b)(t-c)=0$ 的三个根.

将后一个方程展开得 $t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0$.

比较这两个三次方程的系数，可得原方程组的解为 $x=-abc$，$y=ab+bc+ca$，$z=-(a+b+c)$.

11. 证明 令 $k=\dfrac{\beta-b\sin\theta}{\alpha+a\cos\theta}$ 表示点 $A(\alpha,\beta)$ 与点 $P(-a\cos\theta,-b\sin\theta)$ 连线的斜率.

点 P 在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，又 $|\alpha|>a$，因而，点 (α,β) 在直线 $x=a$ 的右侧或直线 $x=-a$ 的左侧. 显见，当直线 AP 与椭圆相切时，k 取得最大值与最小值.

椭圆的任一切线方程为 $y=kx\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$.

$\because A(\alpha,\beta)$ 在切线上，$\therefore \beta=k\alpha\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$，解得 $k=\dfrac{\alpha\beta\pm\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2}}{\alpha^2-a^2}$，结论得证.

12. 解 构造函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$，$x\in(0,1)$，易证对于 x_1、$x_2\in(0,1)$，有 $(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant 0$. 因此，有 $\left(a-\dfrac{1}{3}\right)\left[f(a)-f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]\geqslant 0$，即 $\left(a-\dfrac{1}{3}\right)\left[\dfrac{a}{1+a^2}-\dfrac{3}{10}\right]\geqslant 0$.

所以，$\dfrac{a^2-\dfrac{1}{3}a}{1+a^2}\geqslant\dfrac{3}{10}\left(a-\dfrac{1}{3}\right)$，即 $\dfrac{3a^2-a}{1+a^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(a-\dfrac{1}{3}\right)$.

同理：$\dfrac{3b^2-b}{1+b^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(b-\dfrac{1}{3}\right)$，$\dfrac{3c^2-c}{1+c^2}\geqslant\dfrac{9}{10}\left(c-\dfrac{1}{3}\right)$.

因此，$u\geqslant\dfrac{9}{10}\left(a-\dfrac{1}{3}+b-\dfrac{1}{3}+c-\dfrac{1}{3}\right)=0$，当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时取等号，故 u 的最小值为 0.

注：本题若构造函数 $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}$，$x\in(0,1)$，再求 $f(x)$ 的最大值则很难得到结果.

13. 证明 构造重要不等式如下：$\dfrac{A-a_1}{n-1}\cdot a_2\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_2^2\right]$，

$\dfrac{A-a_1}{n-1}\cdot a_3\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_3^2\right]$，…，

$\dfrac{A-a_1}{n-1}\cdot a_n\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{A-a_1}{n-1}\right)^2+a_n^2\right]$.

将上述 $(n-1)$ 个同向不等式相加得：

$$\frac{A-a_1}{n-1}(a_2+a_3+\cdots+a_n)\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{n-1}{(n-1)^2}\right)(A-a_1)^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\right],$$

即 $\dfrac{(A-a_1)^2}{n-1}\leqslant\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(A-a_1)^2}{n-1}+\dfrac{A^2}{n-1}-a_1^2\right]\Rightarrow na_1^2-2a_1A\leqslant 0\Rightarrow 0\leqslant a_1\leqslant\dfrac{2A}{n}$.

同理可求得 $0\leqslant a_k\leqslant\dfrac{2A}{n}(k=1,2,\cdots,n)$.



参考文献

[1]爱德华·巴尔博,默里·克拉姆金.给数学迷的500个挑战性问题.上海：上海科技教育出版社，2007.1

[2]黄国勋.奥林匹克数学方法选讲.上海：上海教育出版社,2003.6

[3]王连笑.解数学竞赛题的常用策略.上海：上海教育出版社,2005.10

[4]2007年IMO中国国家集训队教练组编.走向IMO数学奥林匹克试题集锦.上海：华东师范大学出版社,2007.9

[5]马传渔.最新国际国内数学奥林匹克竞赛优化解题题典.长春：林教育出版社，2003.9

[6]冷岗松,沈文选.奥赛经典·奥林匹克数学中的代数问题.长沙：湖南师范大学出版社,2004.11

[7]杨万忍.奥林匹克数学题解探究.澳门：澳门教育出版社,2007.3

[8]单墫.数学竞赛研究教程.苏州：江苏教育出版社,2002.2

[9]李胜宏.平均值不等式与柯西不等式.上海：华东师范大学出版社,2005.4

[10]沈虎跃.三角函数.杭州：浙江大学出版社,2007.6

[11]唐立华.数学奥林匹克中的不等式问题.中等数学.上海：2006(6)

[12]杨华.构造配对式证明不等式.中等数学.2005(3)

[13]何念如,陈艳.构造法在解数学竞赛题中的运用.中等数学.2005(8)

[14]蔡小雄.加强命题证明竞赛中的数列不等式题.中等数学.2007(10)

[15]蔡小雄.2006年联赛二试第二题的别解.中等数学.2007(2)

[16]蔡小雄.多元递推数列问题.数学通讯.2007(3)

[17]蔡小雄.构建三角系统解竞赛题.中学数学研究.2007(5)

[18]蔡小雄.Abel分部求和公式在竞赛中的运用.数理天地.2007(7)

[19]蔡小雄.竞赛中多元函数最值问题的15种解答策略.中学教研.2007(10)

[20]蔡小雄,孙惠华.新课标高中数学竞赛通用教材.杭州：浙江大学出版社,2007.6

[21]蔡小雄.竞赛中与调和级数有关的不等式问题透析.中学教研.2007(1)

[22]蔡小雄.解分式最值问题的代换策略.中等数学.2007(7)

[23]蔡小雄.用分拆与合项的方法解数列不等式.中等数学.2008(5)

